



evropský
sociální
fond v ČR



EVROPSKÁ UNIE



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY



OP Vzdělávání
pro konkurenceschopnost

INVESTICE DO ROZVOJE VZDĚLÁVÁNÍ

PRUŽNOST A PLASTICITA

PŘEDNÁŠKY

Doc. Ing. Vlastislav Salajka, Ph.D.

OBSAH

1 Úvod	6
1.1 Cíl	6
1.2 Požadované znalosti	6
1.3 Doba potřebná ke studiu	6
1.4 Klíčová slova	6
2 Základní pojmy	9
2.1 Pole posunutí	10
2.2 Pole deformací	10
2.3 Pole napětí	12
3 Základní rovnice v teorii lineární pružnosti.....	16
3.1 Vztahy mezi deformacemi a posunutími – geometrické rovnice	16
3.2 Vztahy mezi napětími a deformacemi – fyzikální rovnice.....	18
3.2.1 Objemové změny	18
3.2.2 Tvarové změny.....	19
3.3 Vztahy mezi napětími a napětími a zatížením – podmínky rovnováhy	21
3.4 Řešitelnost	22
3.5 Rovnice spojitosti deformace – podmínky kompatibility	22
4 Zjednodušení 3D úlohy na 2D a 1D úlohy pružnosti.....	24
4.1 Rovinná napjatost	24
4.2 Rovinná deformace.....	25
4.3 1D úlohy pružnosti	26
4.4 Další vztahy v teorii kontinua.....	26
5 Deformační práce a energie deformace při prostorové napjatosti.....	28
6 Metody řešení okrajových úloh teorie pružnosti. Princip virtuálních prací a variační principy	31
6.1 Energie soustavy.....	31
6.1.1 Potenciální energie soustavy – P.E.S	31
6.1.2 Komplementární (doplňková) energie soustavy – K.E.S.....	32
6.2 Funkcionál a jeho variace	33
6.3 Virtuální práce	34
6.4 Princip virtuálních přemístění	34
6.5 Princip virtuálních sil	35
6.6 Klasické variační principy	35
6.6.1 Princip minima celkové potenciální energie soustavy (Lagrange)	35
6.6.2 Princip minima komplementární energie soustavy (Castigliano)	36
6.6.3 Maticový zápis principu virtuálních přemístění (Lagrange).....	37
6.6.4 Maticový zápis principu virtuálních sil (Castigliano).....	37
6.7 Ritzova metoda	40
6.7.1 Příklad na užití Ritzovy metody 1:	40
6.7.2 Příklad na užití Ritzovy metody 2:	42

6.8	Poznámky k variačním metodám	43
7	Výpočtové modely:	45
7.1	Analýza konstrukce – vytvoření matematického popisu konstrukce a zatížení	46
7.1.1	Výpočtové modely:.....	46
8	Metoda konečných prvků	48
8.1	Analýza diskrétních soustav.....	48
8.1.1	Příklad.....	48
8.2	Analýza spojitých soustav.....	51
8.2.1	Příklad – potrubní systém.....	52
9	MKP - 1D problémy	57
9.1	Matice tuhosti prutu přiřadoviny.....	57
9.1.1	Základní postup	57
9.1.2	Matice tuhosti prutu přiřadoviny – odvození pomocí tvarových (přípustných, báзовých) funkcí	59
9.2	Matice tuhosti a vektor zatížení ohýbaného prutu	61
9.3	Matice tuhosti a vektor zatížení krouceného prutu	64
10	Rovinné úlohy	68
10.1	Matice tuhosti a zatěžovacího vektoru trojúhelníkového prvku	68
10.2	Matice tuhosti a zatěžovacího vektoru jednoduché konstrukce sestávající z různých typů konečných prvků.....	73
10.2.1	Matice tuhosti jednotlivých prvků:	74
10.2.2	Matice tuhosti konstrukce se zahrnutím okrajových podmínek	75
10.2.3	Zatěžovací vektor konstrukce:	75
11	Izoparametrické konečné prvky	76
11.1	Základní pojmy	76
11.2	Dvouuzlový konečný prvek přiřadoviny.....	77
11.2.1	Odvození matice tuhosti	77
11.3	Tabulka vybraných izoparametrických prvků:	79
11.4	Matice tuhosti a zatěžovací vektor čtyřuzlového izoparametrického prvku pro řešení úlohy rovinné napjatosti.....	87
11.4.1	Interpolační funkce	87
11.4.2	Vztahy pro popis souřadnic:	88
11.4.3	Energie deformace prvku:	90
11.4.4	Matice tuhosti prvku:.....	92
11.4.5	Vyčíslení vektoru zatížení od působení povrchového zatížení na straně 1-2 pro čtyřuzlový prvek.....	92
11.4.6	Matice hmotnosti čtyřuzlového izoparametrického prvku	94
11.4.7	Gaussova numerická integrace v případě integrace na prvcích.....	94
12	Numerická integrace	96
12.1	Jednorozměrný případ.....	96
12.1.1	Interpolace pomocí polynomů	97
12.1.1.1	Příklad	98

12.1.2	Newton-Cotesovy integrační vztahy	98
12.1.2.1	Příklad	99
12.1.2.2	Příklad	100
12.1.2.3	Příklad	100
12.1.2.4	Příklad	101
12.1.3	Gaussova numerická integrace.....	102
12.1.3.1	Příklad	104
12.1.3.2	Příklad	104
12.2	Vícerozměrný případ	105
12.2.1	Gaussova numerická integrace v případě integrace na prvcích.....	105
13	Základní přístupy k řešení ohýbaných desek.....	108
13.1	Teorie tlustých desek	108
13.1.1	Vztahy mezi deformacemi a posunutími	111
13.1.2	Vztahy pro výpočet napětí	111
13.1.3	Měrné vnitřní síly (intenzity vnitřních sil) – vnitřní síly na jednotku délky.....	112
13.2	Teorie tenkých desek – klasická Kirchhoffova teorie	113
13.2.1	Vztahy mezi deformacemi a posunutími	114
13.2.2	Vztahy pro výpočet napětí	114
13.2.3	Základní diferenciální rovnice desky	115
13.2.4	Základní okrajové podmínky	116
13.2.4.1	Prostý podepření okraj	116
13.2.4.2	Volný okraj.....	116
13.2.4.3	Vetknutý okraj.....	116
13.2.1	Speciální okrajové podmínky	117
13.3	Hlavní momenty	117
13.4	Přesnější modely desek.....	118
13.5	Metody řešení desek	118
13.6	Matice tuhosti ohýbaných desek	119
13.6.1	Tenké desky	119
13.6.1.1	Trojúhelníkový konečný prvek – teorie tenkých desek.....	119
13.6.1.2	Obdélníkový konečný prvek – teorie tenkých desek.....	122
13.6.1.3	Kompatibilní konečné prvky pro řešení ohybu tenkých desek.....	124
13.6.1.4	Statická kondenzace	126
13.6.1.5	Kompatibilní čtyřúhelníkové konečné prvky	127
13.6.2	Konečné prvky pro řešení ohybu tlustých desek	128
13.6.2.1	Izoparametrický konečný prvek o 24 stupních volnosti.....	128
14	Skořepiny	131
14.1	Tenké stavební skořepiny	132
14.2	Přesná ohybová teorie pro vyšetřování plných tenkých skořepin: ...	134
14.3	Skořepinový plochý čtyřuzlový konečný prvek	138
15	Prostorové konečné prvky	141
16	Analýza konvergence	142

16.1	Nekompatibilní modely prvků	143
16.2	Výpočet napětí na prvku	144

1 Úvod

1.1 Cíl

Cílem tohoto modulu je seznámit studenty s teorií pružnosti. Modul navazuje na předmět Pružnost a pevnost, jehož učivo rozšiřuje o:

- obecné podmínky řešení tělesa,
- stěny,
- desky,
- skořepiny
- úvod do energetických metod,
- metodu konečných prvků.



1.2 Požadované znalosti

Probíraná látka předpokládá základní znalosti z předmětů:

- BD01 Základy stavební mechaniky,
- BD02 Pružnost a pevnost,
- BD04 Statika II



1.3 Doba potřebná ke studiu

Předpokládaná doba ke studiu je cca 120 hodin pro nastudování učebního textu.



1.4 Klíčová slova



Pružnost (elasticity) – je část mechaniky, která studuje vztahy mezi deformacemi těles a vnějšími silami, které na těleso působí. V úlohách pružnosti se potom řeší, zda deformace tělesa či konstrukce nepřesáhla dovolenou hodnotu (www.wikipedia.org).

Plasticita materiálu (plasticity) – schopnost materiálu bez porušení kontinuity trvale uchovat deformace, vyvolané účinkem vnějších sil, popřípadě zvětšovat je vlivem plastického toku. K plastické deformaci dochází, překročí-li napětí od zatížení mez pružnosti. Plasticita závisí na typu materiálu jeho struktuře, čistotě i na podmínkách zatěžování, zejména teplotě, rychlosti a změně zatížení i na tvaru a velikosti tělesa (www.cojeco.cz).

Geometrické rovnice (geometric conditions) – též geometrické podmínky, popisují vztahy mezi přemístěními (posunutími a pootočeními) a poměrnými deformacemi.

Fyzikální rovnice (constitutive conditions) – též fyzikální podmínky. Popisují vztahy mezi napětími a poměrnými deformacemi.



Rovnice rovnováhy (equilibrium conditions) – též podmínky rovnováhy. Popisují vztahy mezi vnějšími silami a napětími a mezi napětími navzájem.

Rovnice spojitosti deformace (**compatibility conditions**) – též podmínky kompatibility. Vyjadřují skutečnost, že těleso, které je spojitě vyplněno látkou před deformací, zůstane spojitě i po deformaci.

1D problém (1D problem) – též prutový problém. Jedná se o redukci obecného tělesa na linii. Další dva rozměry se vyjadřují souhrnně pomocí průřezových charakteristik.

2D problém (2D problem) – redukce obecného tělesa na plochy. Třetí rozměr se vyjadřuje pomocí tloušťky. V technické praxi se jedná o stěny, desky a skořepiny.



Stěna (wall) – Rovinná 2D konstrukce, která je zatížena a okrajové podmínky se realizují v rovině stěny.

Deska (plate) – Rovinná 2D konstrukce, která je zatížena a okrajové podmínky se realizují kolmo k rovině desky.

Skořepina (shell) – obecně zakřivená 2D konstrukce, která je zatížena v ploše i kolmo na rovinu řídící plochy.

Deformační práce (deformation work) – práce vnějších sil vynaložená na deformaci tělesa.

Energie deformace (deformation energy) – energie akumulovaná ve zdeformovaném tělese

Virtuální práce (virtual work) – práce síly na dráze, která se silou příčinně nespojuje. Síla pracuje na dráze, kterou nezpůsobila.

Variační princip (variational principle) – tvrzení, podle něhož je rovnováha nebo skutečný pohyb soustavy určen nulovou variací (stacionární hodnotou) jisté fyzikální veličiny závislé na charakteristikách systému. (encyklopedie www.cojeco.cz)

Funkcionál (functional) – předpis, který přiřazuje reálné, respektive komplexní číslo každému prvku jisté třídy matematických objektů (encyklopedie www.cojeco.cz). Pro účely tohoto textu můžeme definici funkcionálu zúžit na předpis (v pružnosti typicky integrál), jehož definiční obor je množina funkcí a obor funkčních hodnot je množina reálných čísel.

Ritzova metoda (Ritz method) – variační metoda, jejíž náhradní funkce jsou platné pro celou řešenou oblast.

Metoda konečných prvků (finite element method)- je numerická metoda sloužící k simulaci průběhů napětí, deformací, vlastních frekvencí, proudění tepla, jevů elektromagnetismu, proudění tekutin atd. na vytvořeném fyzikálním modelu. Její princip spočívá v diskretizaci spojitého kontinua do určitého (konečného) počtu prvků, přičemž zjišťované parametry jsou určovány v jednotlivých uzlových bodech (www.wikipedia.org). Oproti Ritzově metodě jsou náhradní funkce platné pouze na jednom konečném prvku.

Izoparametrický konečný prvek (isoparametric finite element) – geometrie prvku i tvar náhradních (interpolačních) funkcí pro popis hledaných polí jsou definovány stejným počtem parametrů.

Superparametrický konečný prvek (superparametric finite element) – geometrie prvku je zadána větším počtem parametrů než tvar náhradních funkcí pro popis hledaných polí.

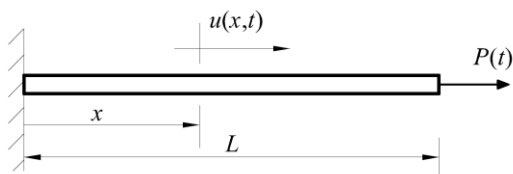
Subparametrický konečný prvek (subparametric finite element) – geometrie prvku je zadána menším počtem parametrů než tvar náhradních funkcí pro popis hledaných polí.

Kompatibilní konečný prvek, též konformní (compatibility finite element) – prvek, který zajistí na hranách spojitost posunů a jejich derivací.

2 Základní pojmy

Matematický popis chování těles při silovém a nesilovém namáhání

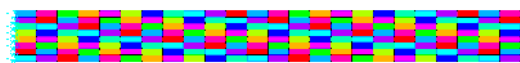
Těleso – kontinuum – popis spojitými funkcemi
(složité parciální diferenciální rovnice)



Popis pomocí polí. Jednotlivá pole – ze základní (inženýrské) pružnosti

1. Pole posunutí
2. Pole deformací
3. Pole napětí

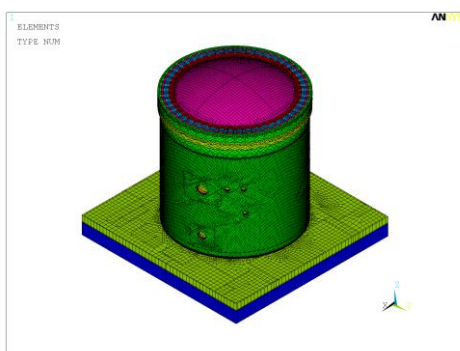
V metodě konečných prvků je těleso diskretizováno.



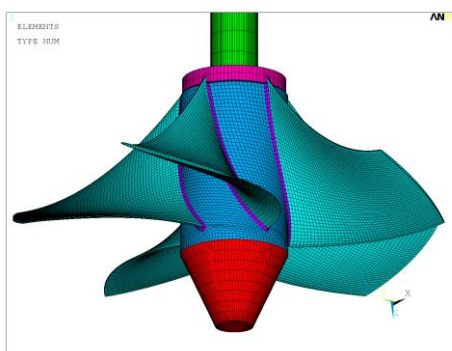
Základní vztahy mezi jednotlivými složkami polí:

1. Deformace $\longleftrightarrow$ posunutí.
2. Napětí $\longleftrightarrow$ deformace.
3. Další vztahy (např. podmínky rovnováhy, rovnice kompatibility).

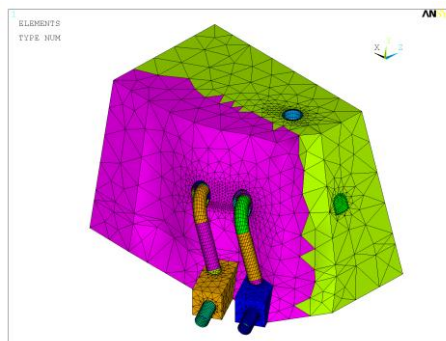
3D modely MKP



Kontejment JE Temelín



Propiler



Přivaděč VE Matka Make-
donie



Visutá lávka, Kolín

2.1 Pole posunutí

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_x & u_y & u_z \end{pmatrix}^T$$

u_x, u_y, u_z jsou složky vektoru posunutí $\{\mathbf{u}\}$,

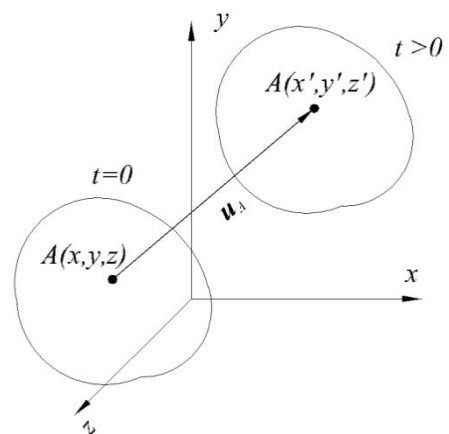
$$u_x = u_x(x, y, z, t) = x - x_0,$$

$$u_y = u_y(x, y, z, t) = y - y_0,$$

$$u_z = u_z(x, y, z, t) = z - z_0.$$

Pole posunutí: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z, t)$.

Pole posunutí ve statice: $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, y, z)$.



2.2 Pole deformací

Dva sousední body (viz obrázek níže):

$$A(x, y, z), B(x + dx, y + dy, z + dz).$$

$$\text{Míra deformace} \quad d\mathbf{u} = \begin{pmatrix} du_x \\ du_y \\ du_z \end{pmatrix},$$

kde du_x , du_y , du_z jsou složky vektoru $d\mathbf{u}$.

Vyjádříme kvadrát vzdálenosti mezi body A a B před deformací

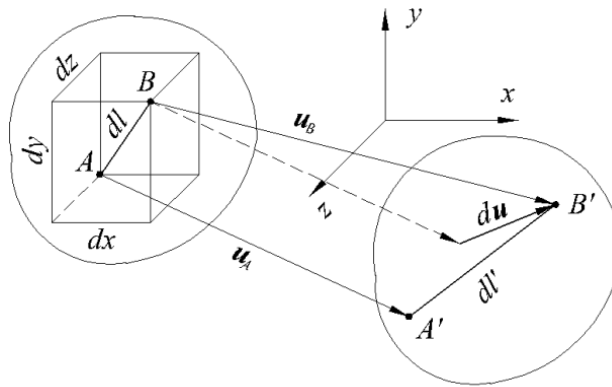
$$dl^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2,$$

a po deformaci

$$dl'^2 = (dx + du_x)^2 + (dy + du_y)^2 + (dz + du_z)^2.$$

Teorie malých deformací:

- $\varepsilon_{ij} \ll 1$,
- největší posuny jsou řádově menší než nejmenší rozměr tělesa,
- největší vzájemné pootočení diferenciálních úseček před a po deformaci jsou menší než $\pi/60$, tj. 3° .



Elementární šestistěn:

- objemové deformace,
- úhlové deformace (změna tvaru).

Míra deformace elementárního šestistěnu na jednotku délky – poměrná deformace.

ε_{xx} , ε_{yy} , ε_{zz} poměrné deformace (objemové), odpovídající translaci,

ε_{xy} , ε_{yz} , ε_{zx} poměrné deformace (úhlové), odpovídající rotaci,

platí $\varepsilon_{xy} = \varepsilon_{yx}$, $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zy}$, $\varepsilon_{zx} = \varepsilon_{xz}$.

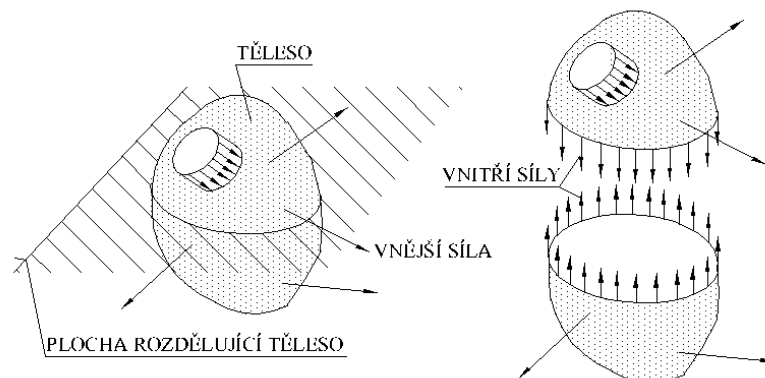
Deformace v libovolném bodě tělesa je popsána vektorem složek deformací

$$\varepsilon = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{zz} \\ \varepsilon_{xy} \\ \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{zz} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{yz} & \varepsilon_{zx} \end{pmatrix}^T,$$

Poměrné deformace tělesa jsou v sousedních bodech tělesa obecně různé, v dynamice i funkcí času. Pod vlivem vnějšího zatížení vzniká v tělese stav deformace (pole deformací)

$$\varepsilon = \varepsilon(x, y, z, t).$$

2.3 Pole napětí

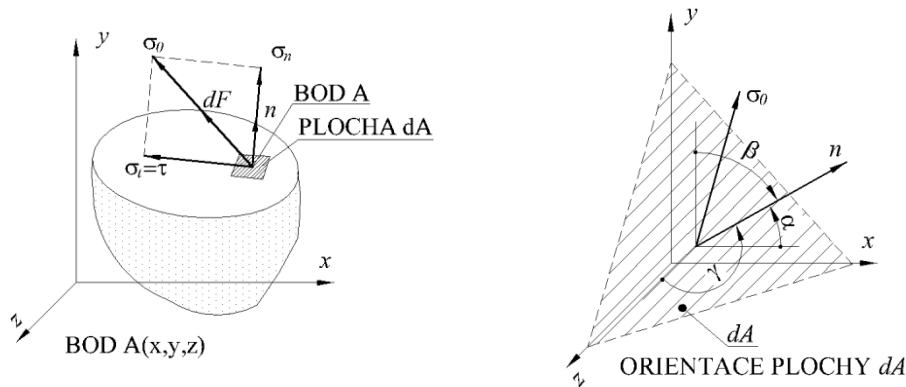


Napětí:
$$\sigma_0 = \frac{dF}{dA}$$

Vektor σ_0 je často rozkládán na σ_n (normálové napětí) – směr shodný s orientací normály n na ploše dA a na σ_t (tečné napětí) ležící v rovině plochy dA .

Stav napětí v bodě $A(x, y, z)$ popisuje tenzor napětí pro tento bod.

$$\sigma_0 = \sigma_0(x, y, z, t).$$



Platí

$$\sigma_0 = \begin{pmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}$$

kde

$\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$ jsou složky vektoru σ_0 ve směrech os x, y, z ,

α, β, γ jsou směrové úhly normály elementární plochy dA (často se značí $\cos \alpha \equiv l, \cos \beta \equiv m, \cos \gamma \equiv n$).

Vektor napětí σ_0 na elementární ploše dA (poloha plochy je definována směrovými úhly α, β, γ normály n) je jednoznačně určen pomocí normálových napětí $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}$ a tečných napětí $\sigma_{xy}, \sigma_{xz}, \sigma_{yx}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \sigma_{zy}$ působících na stěnách elementárního šestištěnu o rozměrech dx, dy, dz .

Matice

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix}$$

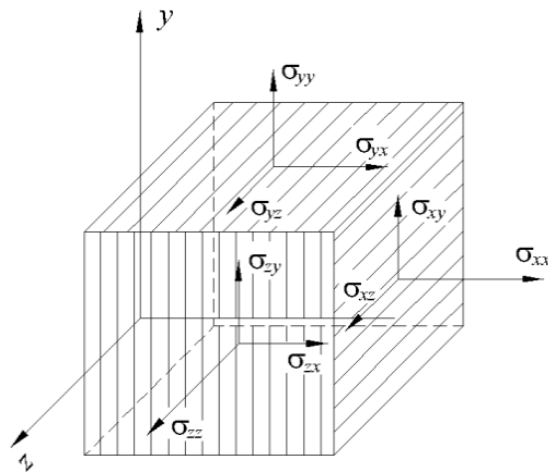
se v teorii pružnosti nazývá tenzorem napětí. Je symetrická, takže platí $\sigma_{xy} = \sigma_{yx}, \sigma_{yz} = \sigma_{zy}, \sigma_{zx} = \sigma_{xz}$.

Stav napětí v libovolném bodě $A(x,y,z)$ lze jednoznačně popsat pomocí vektoru složek napětí

$$\sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{pmatrix}.$$

Pod vlivem působení vnějšího zatížení vzniká v tělese pole napětí

$$\sigma = \sigma(x, y, z, t).$$



Existují tři plochy dA (vzájemně mezi sebou kolmé), pro které napětí σ v libovolném bodě $A(x,y,z)$ dosahuje hodnot

maximum σ_{max} ,

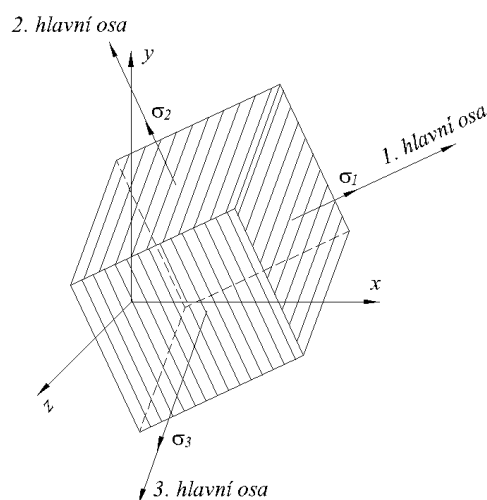
minimum σ_{min} ,

$\sigma_{stř.}$

Směry normál na těchto třech plochách definují hlavní osy napětí v daném bodě. V hlavních osách jsou tečná napětí rovna nule.

Napětí odpovídající poloze hlavních os se nazývají hlavní napětí $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$.

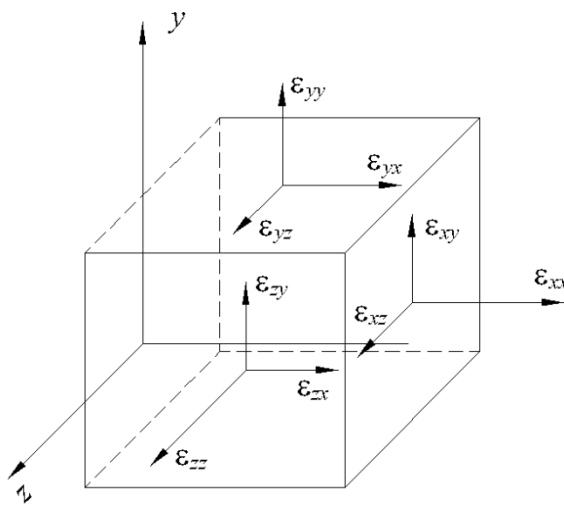
$$\sigma_{max} \equiv \sigma_1 \geq \sigma_{stř.} \equiv \sigma_2 \geq \sigma_{min} \equiv \sigma_3$$



Obdobně matice poměrných deformací se v teorii pružnosti nazývá tenzorem deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{xz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \frac{1}{2}\varepsilon_{yz} \\ \frac{1}{2}\varepsilon_{zx} & \frac{1}{2}\varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix}$$

$\varepsilon_1 \geq \varepsilon_2 \geq \varepsilon_3$ jsou hlavní deformace.



Při řešení úloh pružnosti hledáme

pole posunutí – 3 funkce u_x, u_y, u_z ,

pole deformací – 6 funkcí $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}$,

pole napětí – 6 funkcí $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}$.

Tj. celkem 15 funkcí pro popis chování tělesa.

Pro analytické řešení statického a dynamického chování (tj. určení posunutí, deformací a napětí) při působení zadaného vnějšího zatížení a teploty je nutno definovat základní rovnice teorie pružnosti vyhovující okrajovým podmínkám (předepsané silové působení nebo předepsané posunutí), tzn. je nutno definovat 15 rovnic.

3 Základní rovnice v teorii lineární pružnosti

- 1) Vztahy mezi deformacemi a posunutími,
- 2) Vztahy mezi napětími a deformacemi,
- 3) Statické podmínky rovnováhy,
- 4) Doplnkové rovnice – rovnice kompatibility

3.1 Vztahy mezi deformacemi a posunutími – geometrické rovnice

Matematicky zapsáno, vyjadřují geometrické rovnice vztah $\varepsilon = f u$.

$$\varepsilon = \Gamma_e u + \Gamma_n u,$$

kde

ε je vektor deformací a

u je vektor posunutí.

Lineární operátor

$$\Gamma_e = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix}, \quad \Gamma_n = \Gamma_n u = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \partial_x u^T \cdot \partial_x \\ \partial_y u^T \cdot \partial_y \\ \partial_z u^T \cdot \partial_z \\ \partial_x u^T \cdot \partial_y + \partial_y u^T \cdot \partial_x \\ \partial_y u^T \cdot \partial_z + \partial_z u^T \cdot \partial_y \\ \partial_z u^T \cdot \partial_x + \partial_x u^T \cdot \partial_z \end{pmatrix},$$

$$\text{kde } \partial_i = \text{diag } \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}.$$

Po rozeepsání

$$\begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} \\
 \varepsilon_{yy} \\
 \varepsilon_{zz} \\
 \varepsilon_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} \\
 \varepsilon_{zx}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
 \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}
 \end{array}
 +
 \begin{array}{l}
 \frac{\partial u_x}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial x}^2 \\
 \frac{\partial u_x}{\partial y}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial y}^2 \\
 \frac{\partial u_x}{\partial z}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial z}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z}^2 \\
 2 \frac{\partial u_x}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial x} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 2 \frac{\partial u_x}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_y}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 2 \frac{\partial u_x}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_y}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \cdot \frac{\partial u_z}{\partial x}
 \end{array}$$

ε_{xx}
 ε_{yy}
 ε_{zz}
 ε_{xy}
 ε_{yz}
 ε_{zx}

↔

u_x
 u_y
 u_z

V případě lineární úlohy pružnosti platí

$$\begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} \\
 \varepsilon_{yy} \\
 \varepsilon_{zz} \\
 \varepsilon_{xy} \\
 \varepsilon_{yz} \\
 \varepsilon_{zx}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{ccc}
 \frac{\partial}{\partial x} & 0 & 0 \\
 0 & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\
 0 & 0 & \frac{\partial}{\partial z} \\
 \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\
 \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial z} & \frac{\partial}{\partial y} \\
 \frac{\partial}{\partial z} & 0 & \frac{\partial}{\partial x}
 \end{array}
 \cdot
 \begin{array}{l}
 u_x \\
 u_y \\
 u_z
 \end{array},
 \quad
 \boxed{\text{po rozeepsání}}
 \rightarrow
 \begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} = \frac{\partial u_x}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yy} = \frac{\partial u_y}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} \\
 \varepsilon_{xy} = \frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \\
 \varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 \varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_x}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial x}
 \end{array}$$

Vztah $\varepsilon \leftrightarrow u$ popisuje 6 rovnic.

3.2 Vztahy mezi napětími a deformacemi – fyzikální rovnice

$$\begin{array}{ccc}
 \sigma_{xx} & & \varepsilon_{xx} \\
 \sigma_{yy} & & \varepsilon_{yy} \\
 \sigma_{zz} & \longleftrightarrow & \varepsilon_{zz} \\
 \sigma_{xy} & & \varepsilon_{xy} \\
 \sigma_{yz} & & \varepsilon_{yz} \\
 \sigma_{zx} & & \varepsilon_{zx}
 \end{array}$$

3.2.1 Objemové změny

Pro jednoosou napjatost – izotropní materiál (index ¹ označuje jednoosou napjatost)

$${}^1\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \cdot \sigma_{xx},$$

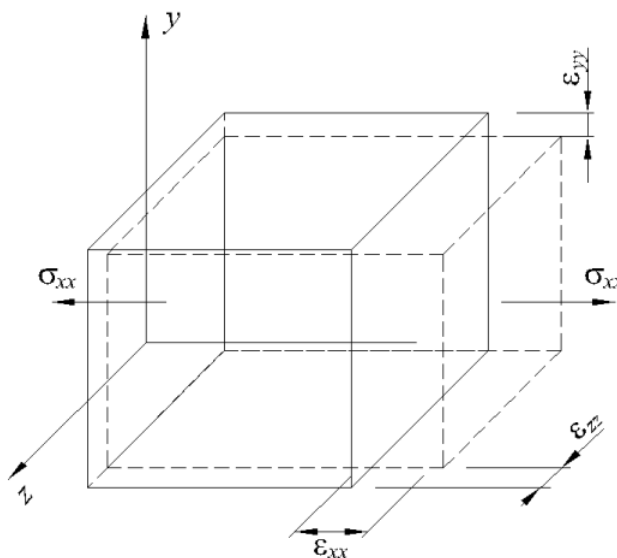
$${}^1\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx},$$

$${}^1\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \cdot \sigma_{xx},$$

kde

E je modul (Youngův) pružnosti,

ν je součinitel příčné kontrakce (Poissonův součinitel). Platí $0 \leq \nu \leq 0,5$.



3.2.2 Tvarové změny

V rovině yz:

$${}^1\varepsilon_{yz} = \gamma_1 + \gamma_2,$$

$${}^1\varepsilon_{yz} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz},$$

Pro prostorovou úlohu podle principu superpozice (lineární vztah mezi σ a ε) platí

$\sigma = D \cdot \varepsilon$, což je vztah mezi polem napětí a polem deformací a

$\varepsilon = D^{-1} \cdot \sigma$ je vztah mezi polem deformací a polem napětí,

kde

D je matice pružnostních konstant.

Rozepsáno pro model lineárního izotropního materiálu

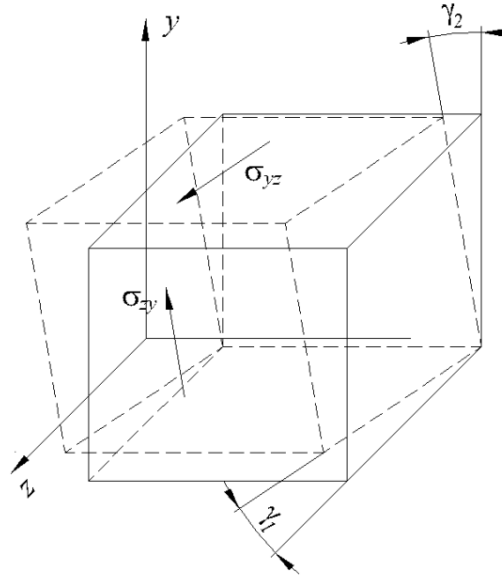
$$D = \frac{E}{1+\nu} \begin{matrix} & \begin{matrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{matrix} \end{matrix}.$$

Vztah mezi ε a σ (maticový zápis)

$$\begin{matrix} \varepsilon_{xx} & 1 & -\nu & -\nu & 0 & 0 & 0 & \sigma_{xx} \\ \varepsilon_{yy} & -\nu & 1 & -\nu & 0 & 0 & 0 & \sigma_{yy} \\ \varepsilon_{zz} & -\nu & -\nu & 1 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{zz} \\ \varepsilon_{xy} & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+\nu & 0 & \sigma_{xy} \\ \varepsilon_{yz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+\nu & \sigma_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1+\nu & \sigma_{zx} \end{matrix} = \frac{1}{E} \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{matrix}$$

Uvedené rovnice se nazývají fyzikální rovnice.

Vztah $\sigma \leftrightarrow \varepsilon$ popisuje 6 rovnic.



Po rozepsání

$$T \varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} - \nu \sigma_{yy} + \sigma_{zz} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{xx}$$

$$T \varepsilon_{yy} = \frac{1}{E} \sigma_{yy} - \nu \sigma_{xx} + \sigma_{zz} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{yy}$$

$$T \varepsilon_{zz} = \frac{1}{E} \sigma_{zz} - \nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{zz}$$

$$T \varepsilon_{xy} = \varepsilon_{xy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy},$$

$$T \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{yz} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{yz},$$

$$T \varepsilon_{zx} = \varepsilon_{zx} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{zx}.$$

Člen αT se použije v případě změny teploty vůči referenční o T° (α je součinitel tepelné roztažnosti materiálu [K^{-1}]). Index T označuje deformaci včetně vlivu změny teploty.

Inverzní vztahy lze získat řešením soustavy výše uvedených rovnic:

$$\sigma_{xx} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} (1 - \nu T \varepsilon_{xx} + \nu T \varepsilon_{yy} + T \varepsilon_{zz}) - \frac{E \alpha T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_{yy} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} (1 - \nu T \varepsilon_{yy} + \nu T \varepsilon_{xx} + T \varepsilon_{zz}) - \frac{E \alpha T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_{zz} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} (1 - \nu T \varepsilon_{zz} + \nu T \varepsilon_{xx} + T \varepsilon_{yy}) - \frac{E \alpha T}{1-2\nu},$$

$$\sigma_{xy} = \frac{E}{2(1+\nu)} T \varepsilon_{xy},$$

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} T \varepsilon_{yz},$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} T \varepsilon_{zx}.$$

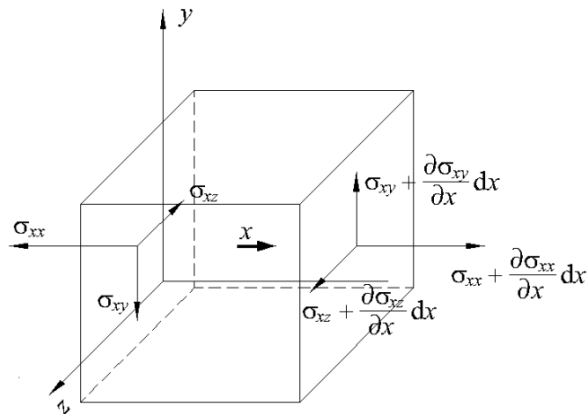
Vztah mezi σ a ε (maticový zápis)

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{zz} \\ \sigma_{xy} \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \end{matrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{matrix} 1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0 \\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{matrix} \begin{matrix} T \varepsilon_{xx} \\ T \varepsilon_{yy} \\ T \varepsilon_{zz} \\ T \varepsilon_{xy} \\ T \varepsilon_{yz} \\ T \varepsilon_{zx} \end{matrix} - \frac{E \alpha T}{1-2\nu} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{matrix}.$$

D

3.3 Vztahy mezi napětími a napětími a zatížením – podmínky rovnováhy

Uvažujeme 9 složek napětí působících na elementární šestistěn (pro přehlednost jsou na obrázku vykresleny složky jenom na dvou stěnách).



Silové podmínky do os x , y a z .

$$\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yx}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y = 0,$$

$$\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z = 0,$$

3 diferenciální rovnice rovnováhy.

kde

X , Y , Z jsou objemové síly.

Momentové podmínky rovnováhy vedou po zanedbání členů vyšších řádů na vztahy

$$\sigma_{yx} = \sigma_{xy},$$

$$\sigma_{xz} = \sigma_{zx},$$

$$\sigma_{zy} = \sigma_{yz}.$$

3.4 Řešitelnost

Neznámé:

$$\left. \begin{array}{l} u_x, u_y, u_z, \\ \varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{zz}, \varepsilon_{xy}, \varepsilon_{yz}, \varepsilon_{zx}, \\ \sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}, \end{array} \right\} 15 \text{ neznámých}$$

Rovnice:

$$\left. \begin{array}{l} 6 \text{ geometrických rovnic,} \\ 6 \text{ fyzikálních rovnic,} \\ 3 \text{ rovnice rovnováhy,} \end{array} \right\} 15 \text{ rovnic}$$

Dva postupy:

1. Řešení v posunutích (deformační varianta),
 2. Řešení v napětích (silová varianta),
- Kombinací obou postupů – smíšená varianta.

Při řešení je nutno splnit podmínky kompatibility

3.5 Rovnice spojitosti deformace – podmínky kompatibility

Podmínky kompatibility vyjadřují skutečnost, že těleso, které je spojitě vyplněno látkou před deformací, zůstane spojitě i po deformaci. Odvodí se z geometrických podmínek.

1. skupina rovnic

platí:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y}.$$

Po jejich sečtení:

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^3 u_x}{\partial x \partial y^2} + \frac{\partial^3 u_y}{\partial x^2 \partial y} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left(\frac{\partial u_x}{\partial y} + \frac{\partial u_y}{\partial x} \right) = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \varepsilon_{xy}.$$

Analogicky se odvodí další 2 rovnice

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{xy}}{\partial x \partial y},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{yz}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zx}}{\partial x \partial z}.$$

2. skupina rovnic

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \\ \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} &= \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \\ \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} &= \frac{\partial^2 u_y}{\partial z \partial x} + \frac{\partial^2 u_x}{\partial y \partial z} - \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}.$$

Dále platí

$$\frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y},$$

po dosazení bude

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

Analogicky cyklickou záměnou indexů dostaneme další 2 rovnice

$$\frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial \varepsilon_{zy}}{\partial z} - \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{xx}}{\partial y \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} + \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{yy}}{\partial x \partial z},$$

$$\frac{\partial}{\partial z} \frac{\partial \varepsilon_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial \varepsilon_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial \varepsilon_{xy}}{\partial z} = 2 \frac{\partial^2 \varepsilon_{zz}}{\partial x \partial y}.$$

4 Zjednodušení 3D úlohy na 2D a 1D úlohy pružnosti

2D úlohy pružnosti jsou

- rovinná napjatost,
- rovinná deformace,
- rotačně symetrická úloha.

4.1 Rovinná napjatost

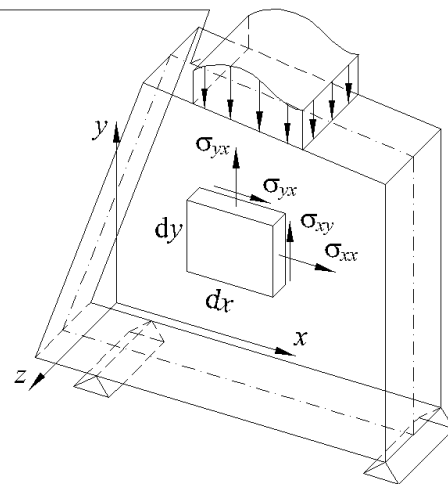
Předpoklady:

- $\sigma_{zz} = \sigma_{zx} = \sigma_{yz} = 0$,
- střednicová rovina leží v rovině xy ,
- zatížení působí v rovině xy ,
- konstrukce je vzhledem ke střednicové rovině uchycena symetricky.

Z předpokladů plyne:

- $\varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx} = 0$
- Nenulové složky nezávislé
 $u_x, u_y,$
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy},$
 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$
- Nenulové složky závislé
 $u_z, \varepsilon_{zz}.$

STŘEDNICOVÁ ROVINA



Fyzikální podmínky

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} = \begin{matrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \begin{matrix} T\varepsilon_{xx} \\ T\varepsilon_{yy} \\ T\varepsilon_{xy} \end{matrix} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{matrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{matrix}.$$

Matice pružnostních konstant v případě rovinné napjatosti

$${}^{RN}\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{bmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{bmatrix}$$

$$\varepsilon_{zz} \neq 0, \varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{xx} + \sigma_{yy} + \alpha T$$

Poznámky:

Některé podmínky kompatibility jsou narušeny, řešení je dostatečně přesné při řešení tenkých stěn (rovinne napjatosti tělesa s malou tloušťkou).

4.2 Rovinná deformace

Předpoklad:

- $\varepsilon_{zz} = \varepsilon_{yz} = \varepsilon_{zx}$,

Z předpokladů plyne:

- $\sigma_{zz} \neq 0$,
- Nenulové složky nezávislé
 u_x, u_y ,
 $\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{xy}$,
 $\varepsilon_{xx}, \varepsilon_{yy}, \varepsilon_{xy}$
- Nenulové složky závislé
 σ_{zz} .

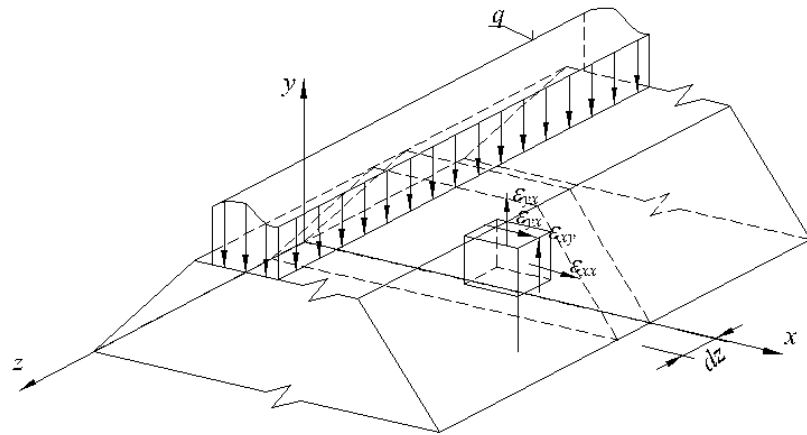
Pracujeme s výřezem šířky dz (popřípadě s jednotkovou šířkou – 1 délková jednotka).

$$\begin{bmatrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \frac{E}{1+\nu} \begin{bmatrix} 1-\nu & \nu & 0 \\ \nu & 1-\nu & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{bmatrix} - \frac{E\alpha T}{1-2\nu} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

$$\sigma_{zz} = \nu \sigma_{xx} + \sigma_{yy} - E\alpha T, \sigma_{yz} = \sigma_{zx} = 0$$

Rotačně symetrická úloha – řešení nádrží, kopulí atd.

- Odvození se neprovádí v kartézském systému souřadnic,
- Odvození ve válcovém systému souřadnic,
- Využití bude uvedeno později.



4.3 1D úlohy pružnosti

Výpočtový model podélně namáhaného prutu

$$\varepsilon_{xx} = \frac{1}{E} \sigma_{xx} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{yy} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_{zz} = -\frac{\nu}{E} \sigma_{zz} + \alpha T,$$

$$\sigma_{xx} = E^T \varepsilon_{xx} - E \alpha T,$$

$$\mathbf{D} = E.$$

4.4 Další vztahy v teorii kontinua

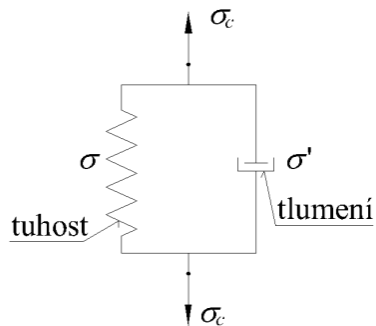
Např. vztahy mezi napětím a rychlostí deformace

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Lambda}^{-1} \boldsymbol{\sigma}, \text{ opačně } \boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\Lambda} \boldsymbol{\varepsilon},$$

kde

$\boldsymbol{\varepsilon}$ je vektor rychlostí poměrných přetvoření; (tečka označuje derivaci podle času),

$\boldsymbol{\sigma}$ je vektor napětí,



Λ je matice tlumících konstant.

nebo opačně $\varepsilon \rightarrow \eta$, platí $\Lambda = \frac{\eta}{E} \mathbf{D}$.

Kelvinův-Voigtův model materiálu

$$\sigma_c = \sigma + \sigma' = E\varepsilon + \eta\dot{\varepsilon},$$

kde

E je Youngův modul pružnosti,

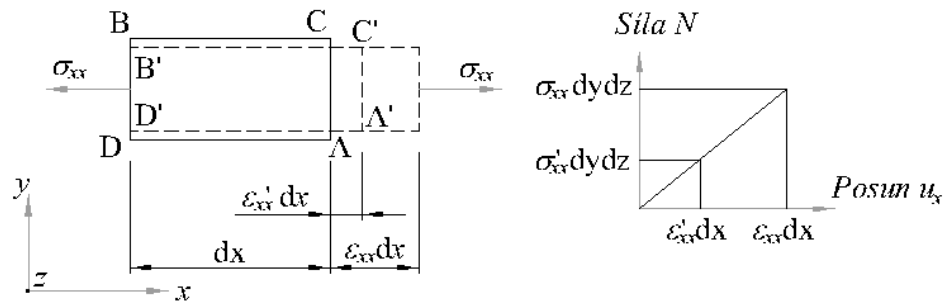
η viskozita (materiálová konstanta, [Pa · s]).

5 Deformační práce a energie deformace při prostorové napjatosti

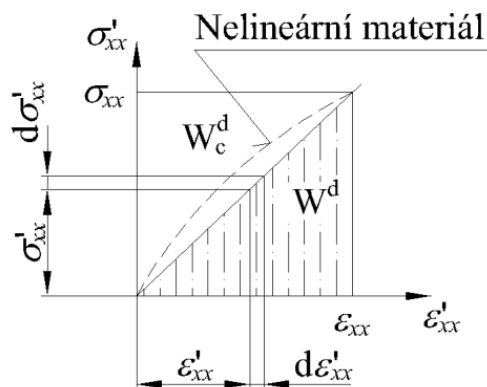
- Kontinuum ideálně pružné – po odtížení se vrací do původní polohy,
- statické zatížení tělesa – od nuly do konečné hodnoty relativně pomalu.

Při zatěžování proměnné vnější síly na poddajném tělese konají práci – deformační práce vnějších sil.

Po zdeformování tělesa se v tělese se v tělese akumuluje energie – energie deformace.



Hranol namáhaný jednoduchým tahem.



Index “c” označuje doplňkovou (komplementární) práci

Intenzita energie deformace

- poměrná potenciální energie W^d – šrafovaná část v grafu výše,
- pro lineárně pružný izotropní materiál (v tahu)

$$W^d = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \epsilon_{xx} = \frac{1}{2} E \epsilon_{xx}^2 = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2.$$

Elementární práce mezilehlé vnější síly $\sigma_{xx} dydz$ na přemístění $d\varepsilon_{xx} dx$ je $\sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} dx dydz$.

Celková práce lineárně narůstající síly

$$dL = \int_{\varepsilon_{xx}=0}^{\varepsilon_{xx}} \sigma_{xx} d\varepsilon_{xx} dx dydz = dU$$

Při prostém tahu platí

$$dU = E dx dydz \int_0^{\varepsilon_{xx}} \varepsilon_{xx} d\varepsilon_{xx} = \frac{1}{2} E \varepsilon_{xx}^2 dx dydz = \frac{1}{2} E \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} dx dydz = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 dx dydz.$$

Plocha nad diagramem křivky napětí – deformace je poměrná komplementární (doplňková) energie deformace

$$W_c^d = \int_0^{\sigma_{xx}} \varepsilon_{xx} d\sigma_{xx}.$$

V případě působení na šestiúhelní smykového napětí σ_{xy} a σ_{yx} je smyková deformace ε_{xy} úměrná smykovému napětí

$$\sigma_{xy} = G \varepsilon_{xy},$$

což je Hookův zákon pro smyk,

kde

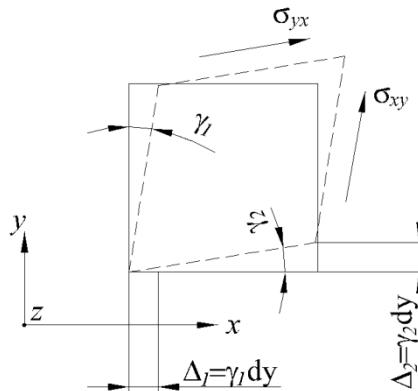
$$G = \frac{E}{2(1+\nu)}.$$

$$\varepsilon_{xy} = 2 \frac{1+\nu}{E} \sigma_{xy} = \frac{\sigma_{xy}}{G},$$

$$W^d = \frac{1}{2} \frac{\tau_{xy}^2}{G}.$$

Při prostorovém namáhání postupným složením jednotlivých energií získáme

$$W^d = \frac{1}{2} \sigma_{xx} \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \varepsilon_{yz} + \sigma_{zx} \varepsilon_{zx}$$



Pro lineární materiál výraz v napětích ($W^d = W_c^d$)

$$W_c^d = W_c^d \sigma = \frac{1}{2E} \sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2 - \frac{\nu}{E} \sigma_{xx} \sigma_{yy} + \sigma_{yy} \sigma_{zz} + \sigma_{zz} \sigma_{xx} + \frac{1}{2G} \sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2,$$

V deformacích

$$W^d = W^d \varepsilon = \frac{1}{2} \Lambda e^2 + 2G \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + G \varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2,$$

kde

$$\Lambda = \frac{Ev}{1+\nu \quad 1-2\nu},$$

$$e = \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz}.$$

Např.:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial W_c^d}{\partial \sigma_{xx}} \sigma &= \frac{\sigma_{xx}}{E} - \frac{\nu}{E} \sigma_{yy} + \sigma_{zz} = \varepsilon_{xx}, \\ \frac{\partial W_c^d}{\partial \tau_{xy}} \sigma &= \varepsilon_{xy}. \end{aligned} \right\} \Rightarrow \begin{aligned} \frac{\partial W_c^d}{\partial \sigma_{ij}} \sigma &= \varepsilon_{ij} \\ \frac{\partial W_c^d}{\partial \varepsilon_{ij}} \sigma &= \sigma_{ij} \end{aligned}$$

Celková energie deformovaného tělesa o objemu V je rovna integrálu poměrných energií

$$U_c = \int_V W_c dV,$$

$$U = \int_V W dV.$$

6 Metody řešení okrajových úloh teorie pružnosti. Princip virtuálních prací a variační principy

Princip virtuálních prací:

- princip minima potenciální energie (Lagrange),
- princip minima doplňkové energie (Castigliano).

Variační principy založené na extrémních vlastnostech funkcionalů dovolují odvodit všechny základní rovnice teorie pružnosti a odpovídající okrajové podmínky a také poskytují metody přibližného řešení.

6.1 Energie soustavy

6.1.1 Potenciální energie soustavy – P.E.S

P.E.S. se také nazývá celková potenciální energie

$$\Pi = U + L,$$

kde

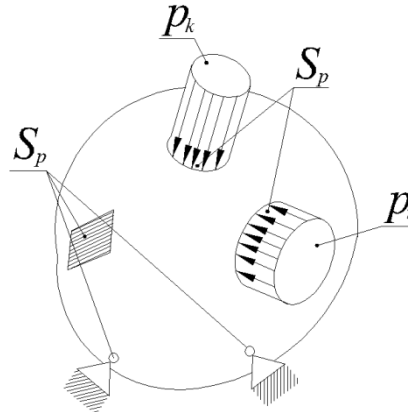
U je potenciální energie deformace,

L je potenciální energie vnějších sil.

$$U = \int_V W^d \varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz} + \varepsilon_{xy} + \varepsilon_{yz} + \varepsilon_{zx} dV,$$

$$L = - \int_V Xu_x + Yu_y + Zu_z dV - \int_{S_p} p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z dS.$$

Pruh nad objemovými a povrchovými silami znamená, že tyto síly jsou zadáné. Přemístění na části S_u povrchu $S = S_p + S_u$ jsou zadána (známa).



Hustota potenciální energie deformace W^d (energie na jednotku objemu).

$$W^d(u_x, u_y, u_z) = \frac{Ev}{2(1+\nu)(1-\nu)} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_y}{\partial y} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right)^2 + G \left(\frac{\partial u_x}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial y}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial z}^2 + \frac{\partial u_x}{\partial y}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_x}{\partial z}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial x}^2 + \frac{\partial u_y}{\partial z}^2 + \frac{\partial u_z}{\partial y}^2 \right) \geq 0.$$

Celková potenciální energie $\Pi(u_x, u_y, u_z)$ při pevně zadaných vnějších silách je funkcí pouze tří proměnných.

6.1.2 Komplementární (doplňková) energie soustavy – K.E.S

K.E.S. se také nazývá celková doplňková energie.

$$\Pi_c = U_c + L_c,$$

kde

U_c je doplňková energie deformace,

L_c je doplňková energie vnějších povrchových sil na S_u .

$$U_c = \int_V W_c^d(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx}) dV,$$

$$L_c = - \int_{S_u} (p_x u_x + p_y u_y + p_z u_z) dS.$$

Pruhy označují, že na části povrchu S_u jsou zadána přemístění.

Pro lineárně pružnou látku platí

$$W_c^d = W^d = \frac{1}{2E} (\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sigma_{zz}^2) + \frac{1+\nu}{2} (\sigma_{xy}^2 + \sigma_{yz}^2 + \sigma_{zx}^2) - \sigma_{xx}\sigma_{yy} - \sigma_{yy}\sigma_{zz} - \sigma_{zz}\sigma_{xx} \geq 0.$$

Povrchová napětí p_x , p_y a p_z lze vyjádřit pomocí složek napětí. Potom celková doplňková energie $\Pi_c(\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{xy}, \sigma_{yz}, \sigma_{zx})$ bude vyjádřena jako funkce 6-ti složek tenzoru napětí.

6.2 Funkcionál a jeho variace

Funkcionál je funkce:

- definiční obor je množina funkcí,
- obor hodnot je množina reálných (komplexních) čísel,

např. funkce energií $U = U(x, y, z)$, $L = L(x, y, z)$.

Funkcionál $L = L(x, y, z)$ je lineární - funkce $U_x(x, y, z)$, $U_y(x, y, z)$, $U_z(x, y, z)$ vystupují v první mocnině.

Pro dvě trojice funkcí U_x^1, U_y^1, U_z^1 (zobrazení $L \rightarrow R_1$) a U_x^0, U_y^0, U_z^0 (zobrazení $L \rightarrow R_0$)

$$\left. \begin{aligned} U_x^1(x, y, z) - U_x^0(x, y, z) &= \delta U_x^0(x, y, z) \\ U_y^1(x, y, z) - U_y^0(x, y, z) &= \delta U_y^0(x, y, z) \\ U_z^1(x, y, z) - U_z^0(x, y, z) &= \delta U_z^0(x, y, z) \end{aligned} \right\} \text{rozdíly se nazývají variace-} \\ \text{mi funkcí } \delta U_x^0, \delta U_y^0, \delta U_z^0.$$

$L(U_x^1, U_y^1, U_z^1) - L(U_x^0, U_y^0, U_z^0) = \Delta L = R_1 - R_0$ se nazývá přírůstkem funkcionálu $L(u_x, u_y, u_z)$ v bodě U_x^0, U_y^0, U_z^0 na variacích $\delta U_x^0, \delta U_y^0, \delta U_z^0$.

Uvedený přírůstek se v případě lineárního funkcionálu rovná jeho první variaci

$$\delta L = \frac{\partial L}{\partial u_x} \delta u_x + \frac{\partial L}{\partial u_y} \delta u_y + \frac{\partial L}{\partial u_z} \delta u_z,$$

potom

$$\delta L = - \int_V X \delta u_x^0 + Y \delta u_y^0 + Z \delta u_z^0 dV - \int_{S_p} p_x \delta u_x^0 + p_y \delta u_y^0 + p_z \delta u_z^0 dS.$$

Příkladem kvadratického funkcionálu je potenciální energie deformace

$$W^d(\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zx}) = G \frac{\nu}{1-2\nu} (\varepsilon_{xx} + \varepsilon_{yy} + \varepsilon_{zz})^2 + \varepsilon_{xx}^2 + \varepsilon_{yy}^2 + \varepsilon_{zz}^2 + \\ \frac{1}{2} (\varepsilon_{xy}^2 + \varepsilon_{yz}^2 + \varepsilon_{zx}^2) \geq 0$$

$$\delta W^d = \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{xx}} \delta \varepsilon_{xx} + \dots + \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{zx}} \delta \varepsilon_{zx},$$

$$\delta^2 W^d = \frac{1}{2} \delta^2 W^d.$$

Dále platí

$$\delta^2 W^d(\varepsilon_{xx}, \dots, \varepsilon_{zx}) = W^d(\delta \varepsilon_{xx}, \dots, \delta \varepsilon_{zx}) \geq 0$$

6.3 Virtuální práce

$\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ síla a přemístění vzájemně příčinně souvisí – skutečná práce,

$\mathbf{F} \cdot \delta \mathbf{u}$ práce skutečné síly na virtuálním přemístění – virtuální práce,

$\delta \mathbf{F} \cdot \mathbf{u}$ práce virtuální síly na skutečném přemístění – virtuální práce.

Virtuální přemístění – libovolné možné přemístění v mezích vnitřních a vnějších vazeb (omezení)

$$\delta U_x \quad x, y, z, \quad \delta U_y \quad x, y, z, \quad \delta U_z \quad x, y, z.$$

Virtuální síla – libovolná (povrchová nebo objemová) síla, která nezávisí na skutečném přemístění.

Virtuální napětí - $\delta \sigma_{xx}, \delta \sigma_{yy}, \dots$ musí plnit diferenciální rovnice rovnováhy a statické podmínky rovnováhy na S_p (staticky přípustné).

6.4 Princip virtuálních přemístění

Když se těleso nebo jeho libovolná část nachází v rovnováze, potom je virtuální práce všech skutečných vnějších a vnitřních sil na virtuálních přemístěních a deformacích rovna nule.

$$\begin{aligned} \int_V \left(\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zx}}{\partial z} + X \right) \delta u_x + \left(\frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zy}}{\partial z} + Y \right) \delta u_y \\ + \left(\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial y} + \frac{\partial \sigma_{zz}}{\partial z} + Z \right) \delta u_z \, dV \\ - \int_{S_p} p_x - p_x \delta u_x + p_y - p_y \delta u_y + p_z - p_z \delta u_z \, dS = 0 \end{aligned}$$

Vzhledem k tomu, že $\delta u_x, \delta u_y$ a δu_z jsou libovolné hodnoty, potom výrazy v kulatých závorkách se musí rovnat nule – podmínky rovnováhy.

$$\begin{aligned} \int_V X \delta u_x + Y \delta u_y + Z \delta u_z \, dV + \int_{S_p} p_x \delta u_x + p_y \delta u_y + p_z \delta u_z \, dS \\ - \int_V \sigma_{xx} \delta \varepsilon_{xx} + \sigma_{yy} \delta \varepsilon_{yy} + \sigma_{zz} \delta \varepsilon_{zz} + \sigma_{xy} \delta \varepsilon_{xy} + \sigma_{yz} \delta \varepsilon_{yz} \\ + \sigma_{zx} \delta \varepsilon_{zx} \, dV = 0 \end{aligned}$$

Když je virtuální práce vnějších a vnitřních sil na kinematicky přípustných virtuálních přemístěních nulová, potom se těleso a i jeho libovolná část nachází v rovnováze.

Princip virtuálních přemístění se nazývá všeobecný princip rovnováhy.

6.5 Princip virtuálních sil

$$\int_V \varepsilon_{xx} \delta \sigma_{xx} + \varepsilon_{yy} \delta \sigma_{yy} + \varepsilon_{zz} \delta \sigma_{zz} + \varepsilon_{xy} \delta \sigma_{xy} + \varepsilon_{yz} \delta \sigma_{yz} + \varepsilon_{zx} \delta \sigma_{zx} dV - \int_{S_p} u_x \delta p_x + u_y \delta p_y + u_z \delta p_z dS = 0$$

Součet prací virtuálních vnějších a vnitřních sil na skutečných přemístěních a deformacích se rovná nule.

Tento princip se také nazývá všeobecný princip geometrické spojitosti.

6.6 Klasické variační principy

6.6.1 Princip minima celkové potenciální energie soustavy (Lagrange)

Vychází se z principu virtuálních přemístění

$$\int_V \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV - \int_V X_i \delta u_i dV - \int_{S_p} p_i \delta u_i dS = 0$$

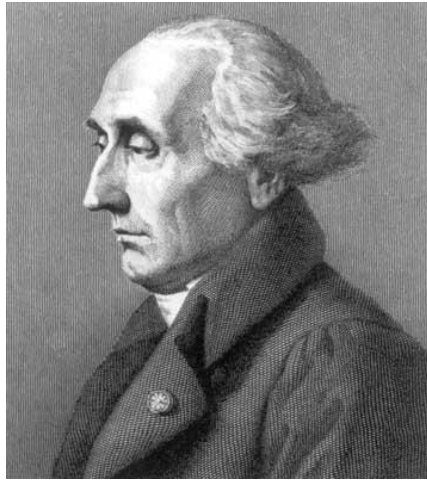
$$\underbrace{\int_V \frac{\partial W^d}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} dV}_{\delta U} - \underbrace{\int_V X_i \delta u_i dV + \int_{S_p} p_i \delta u_i dS}_{\delta L} = \delta \Pi = 0$$

Tedy $\delta U + \delta L = \delta \Pi = 0$.

Platí $\Pi(u_x, u_y, u_z) = U + L = \Pi(u_x, u_y, u_z) = \text{minimum}$

Věta o absolutním minimu potenciální energie:

Ze všech kinematicky přípustných přemístění jediné skutečné přemístění (odpovídající rovnovážnému stavu) dávají potenciální energii soustavy minimální hodnotu.



Joseph-Louis Lagrange
comte de l'Empire
1736 - 1813



Carlo Alberto Castiglione
(1847 – 1884)

6.6.2 Princip minima komplementární energie soustavy (Castiglione)

Vychází se z principu virtuálních sil

$$\underbrace{\int_V \frac{\partial w_c}{\partial \sigma_{ij}} \delta \sigma_{ij} dV}_{\delta U_c} - \underbrace{\int_{S_u} u_i \delta p_i dS}_{\delta L_c} = 0.$$

$$\int_V \delta W_c^d dV = \delta U_c - \int_{S_p} u_i p_i dS = \delta L_c$$

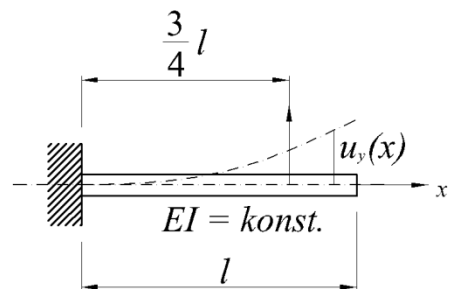
$$\text{Tedy } \delta U_c + \delta L_c = \delta (U_c + L_c) = \delta \Pi_c = 0.$$

Ze všech staticky přípustných stavů tělesa jediné skutečná napjatost dává komplementární energii soustavy minimální hodnotu.

Příklad: Odvoďte výraz pro celkovou potenciální energii soustavy (viz obr.)

Energie deformace ohýbaného nosníku

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2} \int_V \sigma_x \varepsilon_x dV = \frac{1}{2} \int_V \frac{\sigma_x^2}{E} dV = \\ &= \frac{1}{2E} \int_V \frac{M_z^2}{I_z^2} y^2 dA dx = \\ &= \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2}{I_z^2} dx \int_A y^2 dA = \frac{1}{2E} \int_0^l \frac{M_z^2}{I_z^2} dx I_z = \\ &= \frac{1}{2EI_z} \int_0^l M_z^2 dx = \frac{1}{2EI_z} \int_0^l u_y'' EI_z^2 dx = \end{aligned}$$



$$\frac{El_z}{2} \int_0^l u_y''^2 dx.$$

Práce vnějších sil

$$L = -Pu_y \Big|_x = \frac{3}{4}l.$$

Celková energie soustavy

$$\Pi = \frac{El_z}{2} \int_0^l u_y''^2 dx - Pu_y \Big|_x = \frac{3}{4}l.$$

6.6.3 Maticový zápis principu virtuálních přemístění (Lagrange)

$$\int_V \delta \boldsymbol{\varepsilon}^T \boldsymbol{\sigma} dV - \int_V \delta \mathbf{u}^T \mathbf{X} dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{u}^T \mathbf{p} dS = 0, \quad (*)$$

kde

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} \quad \text{jsou vnější objemové síly (zatížení),}$$

$$\mathbf{p} = \begin{pmatrix} p_x \\ p_y \\ p_z \end{pmatrix} \quad \text{jsou vnější povrchové síly (zatížení),}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\Gamma} \boldsymbol{\sigma}, \quad \text{jsou poměrná přetvoření jako funkce napětí,}$$

$$\mathbf{u}_{s_u} = \mathbf{u} \quad \text{jsou doplňující podmínky.}$$

$$\delta \mathbf{u} \quad \text{je libovolné, kinematicky přípustné pole posunutí,}$$

$$\delta \boldsymbol{\varepsilon} \quad \text{je libovolné, kinematicky přípustné pole deformace.}$$

Z Lagrangeova principu lze odvodit rovnice rovnováhy a statické okrajové podmínky – DEFORMAČNÍ metoda.

6.6.4 Maticový zápis principu virtuálních sil (Castigliano)

$$\int_V \delta \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV - \int_V \delta \mathbf{X}^T \mathbf{u} dV - \int_{S_p} \delta \mathbf{p}^T \mathbf{u} dS = 0,$$

kde

$$\delta \boldsymbol{\sigma} + \mathbf{X} = \mathbf{0} \quad \text{jsou statické podmínky rovnováhy,}$$

$$\mathbf{p}_{s_p} = \mathbf{p} \quad \text{jsou doplňující podmínky,}$$

$$\delta \quad \text{je operátor.}$$

Z Castiglianova principu lze odvodit geometrické rovnice a geometrické okrajové podmínky – SILOVÁ metoda.

Rovnice (*) vede na soustavu rovnic ve tvaru

$$\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r},$$

kde

$\mathbf{A}$ je čtvercová symetrická matice,

$\mathbf{r}$ je vektor zatížení,

$\mathbf{x}$ je vektor neznámých koeficientů rozložené funkce u pomocí báзовých (přípustných) funkcí $u_1, u_2, \dots, u_n$.

Vztah $\mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{r}$ představuje lineární transformaci $\mathbf{x}$ vůči $\mathbf{r}$. Po výběru báзовých funkcí pro posunutí u získáme

$$u = x_1 u_1 + x_2 u_2 + \dots + x_n u_n.$$

Koeficienty a_{ij} matice $\mathbf{A}$ získáme záměnou u a δu j -tou a i -tou báзовou funkcí (tj. $u = u_j$ a $\delta u = \delta u_i$) ve výrazu (*) s následnou integrací. Analogicky se vyčísluje prvek r_i vektoru $\mathbf{r}$. Matice $\mathbf{A}$ je symetrická, protože pro posunutí u a variaci δu použijeme stejné báзовé (přípustné) funkce.

Příklad: Variační formulace pro podélně namáhaný prut má tvar

$$\int_L \delta u \, x \, EA \, x \, u \, x \, dx - \int_V p \, x \, \delta u \, x \, dV = 0$$

kde

$u \, x$ je podélné posunutí,

$EA \, x$ je podélná tuhost prutu,

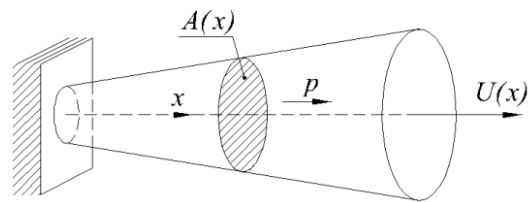
$$A = A_0 + 1 + x \, L,$$

$p \, x$ je vnější objemové zatížení,

L je délka prutu,

V je objem prutu.

Najděte aproximaci podélného posunutí prutu.



Řešení: Zvolme báзовé funkce ve tvaru polynomů x a x^2 :

$$u = a_1 x + a_2 x^2, \quad u = a_1 + 2a_2 x,$$

$$\delta u = \delta a_1 x + \delta a_2 x^2, \quad \delta u = \delta a_1 + 2x \delta a_2,$$

potom

$$\int_0^L \delta a_1 + 2x\delta a_2 EA a_1 + 2xa_2 dx - \int_0^L Ap \delta a_1 x + \delta a_2 x^2 dx = 0.$$

Pro výpočet prvku a_{ij} matice $\mathbf{A}$ použijeme první člen rovnice. Necht' $\delta a_i = 1$, $a_j = 1$ a všechny ostatní souřadnice budou rovny nule (lineární nezávislost - $a_{1,j-1} = a_{j+1,n} = 0$, $a_j = 1$).

$$a_{11} = \int_0^L 1 + 0 EA_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) 1 + 0 dx = EA_0 \frac{3}{2}L,$$

$$a_{12} = \int_0^L 1 EA_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) 2x dx = EA_0 \frac{5}{3}L^2,$$

$$a_{21} = \int_0^L 2x EA_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) 1 dx = EA_0 \frac{5}{3}L^2,$$

$$a_{22} = \int_0^L 2x EA_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) 2x dx = EA_0 \frac{7}{3}L^3.$$

Obdobně i -tý prvek vektoru $\mathbf{r}$, $\delta a_i = 1$,

$$r_1 = \int_0^L p A x dx = \int_0^L p A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) x dx = A_0 p \frac{5}{6}L^2,$$

$$r_2 = \int_0^L p A x^2 dx = \int_0^L p A_0 \left(1 + \frac{x}{L}\right) x^2 dx = A_0 p \frac{7}{12}L^3,$$

$$EA_0 \begin{pmatrix} \frac{3}{2}L & \frac{5}{3}L^2 \\ \frac{5}{3}L^2 & \frac{7}{3}L^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = A_0 p \begin{pmatrix} \frac{5}{6}L^2 \\ \frac{7}{12}L^3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{105}{78} \\ -\frac{37}{52L} \end{pmatrix} p \frac{L}{E},$$

$$u = \frac{105}{78} \frac{pL}{E} x - \frac{37}{52} \frac{p}{E} x^2.$$

Pro řešení úloh mechaniky na bázi variačního počtu existuje celá řada postupů

- metoda vážených reziduí,
- Galerkinova metoda,
- kolokační metoda,
- Ritzova metoda,
- metoda nejmenších čtverců,
- atd.

6.7 Ritzova metoda

V případě Ritzovy metody se zvolené náhradní funkce dosadí do výrazu pro celkovou energii deformace Π . Poté lze získat n rovnic pro výpočet parametrů a_i z podmínek

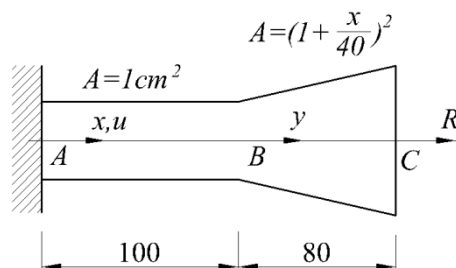
$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_i} = 0, i = 1, 2, \dots, n$$

V případě Ritzovy metody zvolené náhradní (Ritzovy) funkce musí plnit pouze hlavní okrajové podmínky. Přirozené okrajové podmínky jsou splněny automaticky, neboť jsou nepřímo obsaženy ve funkcionalu Π . Přesto je však velmi těžké najít funkce, aby byly splněny hlavní okrajové podmínky (praktické omezení Ritzovy metody).

6.7.1 Příklad na užití Ritzovy metody 1:

Rovnice průřezové plochy a zatížení:

$$A = 1 + \frac{x}{40}^2, R = 100 \text{ kN}.$$



Celková potenciální energie konstrukce

$$\Pi = \int_0^{180} \frac{1}{2} EA u'^2 dx - 100u \quad x = 180, \quad u = \frac{du}{dx}.$$

a okrajová podmínka $u \text{ při } x = 0 = 0$ (hlavní okrajová podmínka).

1. Najděte přesné řešení a rozdělení napětí na nosníku.
2. Vyčíslíte funkci posunutí a napětí při použití Ritzovy metody za předpokladu,
 - a) že zvolená funkce posunutí je $u = a_1 x + a_2 x^2$,
 - b) $u = \frac{x u_B}{100}$, $0 \leq x \leq 100$ a $u = \left(1 - \frac{x-100}{80}\right) u_B + \frac{x-100}{80} u_C$, $100 \leq x \leq 180$, kde u_B a u_C jsou posunutí v bodech B a C.

Řešení:

1. Pro výpočet přesného řešení funkce posunutí převedeme funkcionál celkové potenciální energie na diferenciální rovnici

$$\delta \Pi = \int_0^{180} E A u' \delta u \, dx - 100 \delta u|_{x=180} = 0.$$

Integrací per-partes získáme

$$\frac{d}{dx} E A u' = 0,$$

$E A u'|_{x=180} = 100$ přirozená okrajová podmínka (silová okrajová podmínka)

Přesné řešení – z rovnice $\frac{d}{dx} E A u' = 0$ po zavedení okrajových podmínek

$u|_{x=0} = 0$ hlavní okrajová podmínka,

$E A u'|_{x=180} = 100$ přirozená okrajová podmínka (silová okrajová podmínka).

Přesné řešení – posunutí

$$u = \frac{100}{E} x; 0 \leq x \leq 100;$$

$$u = \frac{10000}{E} + \frac{4000}{E} - \frac{4000}{E \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^2}; 100 \leq x \leq 180.$$

Přesné řešení – napětí

$$\sigma = 100; 0 \leq x \leq 100,$$

$$\sigma = \frac{100}{1 + \frac{x-100}{40}}; 100 \leq x \leq 180.$$

2. Přibližné řešení Ritzovou metodou

Funkce $u = a_1 x + a_2 x^2$ vyhovuje hlavní okrajové podmínce, ale ne přirozené okrajové podmínce.

a) Dosazením $u = a_1 x + a_2 x^2$ do výrazu pro Π .

Funkce $u = a_1 x + a_2 x^2$ vyhovuje hlavní okrajové podmínce, ale ne přirozené okrajové podmínce.

$$\Pi = \frac{E A_1}{2} \int_0^{100} a_1^2 + 2 a_2 x \, dx + \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40}\right)^{-2} a_1^2 + 2 a_2 x^2 \, dx - 100 u|_{x=180}.$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \quad \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0 \quad \text{minimalizace vzhledem k } a_1 \text{ a } a_2.$$

$$E \begin{pmatrix} 0,4467 & 115,6 \\ 115,6 & 34075,6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ 3240 \end{pmatrix}$$

$$a_1 = \frac{129}{E},$$

$$a_2 = -\frac{0,341}{E}.$$

Funkce posunu a napětí

$$u = \frac{129}{E}x - \frac{0,341}{E}x^2,$$

$$\sigma = 129 - 0,628x,$$

pro $0 \leq x \leq 180$.

$$\text{b) } u = \frac{xu_B}{100}, \text{ pro } 0 \leq x \leq 100 \text{ a}$$

$$u = 1 - \frac{x-100}{80} u_B + \frac{x-100}{80} u_C, \text{ pro } 100 \leq x \leq 180,$$

$$\Pi = \frac{E}{2} \int_0^{100} \frac{1}{100} u_B^2 dx +$$

$$+ \frac{E}{2} \int_{100}^{180} \left(1 + \frac{x-100}{40} - \frac{1}{80} u_B + \frac{1}{80} u_C \right)^2 dx - 100u_C,$$

kde

$$\frac{1}{100} u_B = u = \frac{du}{dx},$$

$$1 + \frac{x-100}{40} = A,$$

$$-\frac{1}{80} u_B + \frac{1}{80} u_C = u = \frac{du}{dx}.$$

Minimalizace vzhledem k u_B a u_C .

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_B} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial u_C} = 0$$

$$\frac{E}{240} \begin{pmatrix} 15,4 & -13 \\ -13 & 13 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_B \\ u_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 100 \end{pmatrix}.$$

$$u_B = \frac{10000}{E}, u_C = \frac{11846,2}{E}$$

$$\sigma = 100, 0 \leq x \leq 100,$$

$$\sigma = \frac{1846,2}{80} = 23,08, 100 \leq x \leq 180.$$

6.7.2 Příklad na užití Ritzovy metody 2:

Funkcionál popisující ztrátu stability prutu

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI v x''^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L v x'^2 dx + \frac{1}{2} k v^2 x = L.$$

Úloha určení Eulerovy kritické síly Ritzovou metodou.

Předpokládáme

$$v(x) = a_1 x^2 + a_2 x^3.$$

Vybraná funkce vyhovuje hlavním okrajovým podmínkám

$$v(x=0) = 0, v'(x=0) = 0.$$

Po dosazení zvolené funkce do funkcionálu:

$$\Pi = \frac{1}{2} \int_0^L EI (2a_1 + 6a_2 x)^2 dx - \frac{P}{2} \int_0^L (2a_1 x + 3a_2 x^2)^2 dx + \frac{1}{2} k a_1 L^2 + a_2 L^3.$$

Výpočet koeficientů a_1 a a_2

$$\frac{\partial \Pi}{\partial a_1} = 0, \frac{\partial \Pi}{\partial a_2} = 0,$$

$$\begin{aligned} 2EI \left(\frac{2L}{3L^2} \frac{3L^2}{6L^3} + kL^4 \frac{1}{L} \frac{L}{L^2} \right) \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} - \\ P L^3 \begin{pmatrix} \frac{4}{3} & \frac{3L}{2} \\ \frac{3L}{2} & \frac{9L^2}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

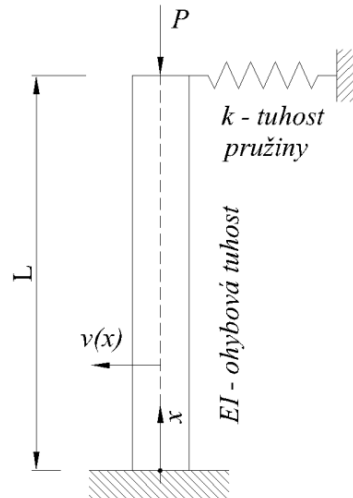
Uvedená rovnice je zobecněnou úlohou o vlastních hodnotách

$$(K - P_i K_G) \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

Řešení:

$$\det(K - P_i K_G) = 0.$$

Menší hodnota ze získaných P_i , kde $i = 1, 2$ a $P_1 < P_2$ je aproximace nejmenší kritické síly a dopočítané hodnoty $^1a_1, ^1a_2$ po dosazení do výrazu v_x určují tvar boulení (ztráty stability).



6.8 Poznámky k variačním metodám

1. Variační metody dovolují relativně jednoduše sestavit soustavu řídicích rovnic. Jednoduchost použití variačních principů vychází ze skutečnosti, že ve variační formulaci úlohy pracujeme se skaláry (energie, potenciál atd.) a ne s vektory (síly, posunutí atd.).

2. Variační metody převádí řešení na soustavu řídicích rovnic a okrajových podmínek.

3. Variační řešení poskytuje některé doplňující informace o řešení problému a dává nezávislou kontrolu při formulaci problému.

4. Pro aproximaci řešení lze použít širokou třídu náhradních funkcí. V mnoha případech je výhodnější pracovat s variační formulací než přímo s diferenciální formulací úlohy. Výhodou je skutečnost, že při užití variační formulace náhradní funkce nemusí vyhovovat všem okrajovým podmínkám, a to z důvodu, že některé okrajové podmínky jsou již nepřímo obsaženy ve funkcionálu.

Uvedené postupy a metody posloužily jako základ pro rozvoj dnes všeobecně používané **metody konečných prvků** (MKP). Metoda konečných prvků jako nástroj pro analýzu nejrozumnějších úloh byla vyvinuta se vznikem počítačů (konec 50. a 60. let minulého století).

Dnes MKP – komplexní modely konstrukcí a jejich částí

Využití speciálního softwarového vybavení na bázi MKP a výkonných mnoho procesorových počítačů (desítky až stovky jader)

FEA – propojení s CAD systémy – rychlá tvorba modelů

Výkonné stabilní řešiče rovnic (100 mil. stupňů volnosti)

Rychlé zpracování výsledků v grafické a číselné formě

7 Výpočtové modely:

Výpočtový model konstrukce:

a – spojitý model

(parciální diferenciální rovnice)

b – diskrétní model

s jedním stupněm volnosti

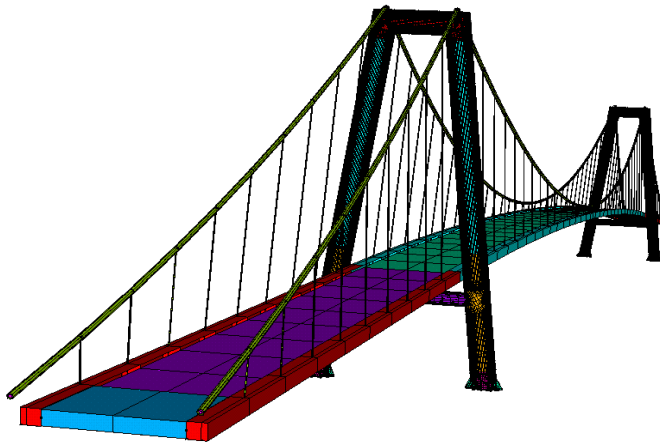
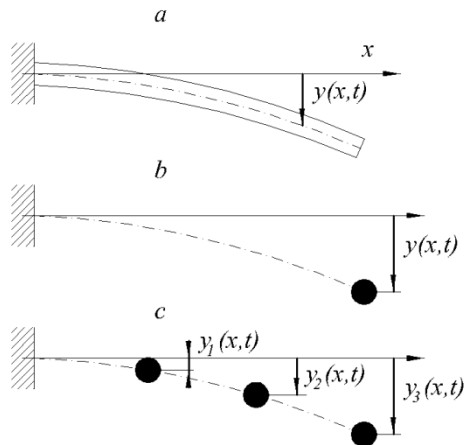
(obyčejné diferenciální rovnice)

c – diskrétní model

se třemi stupni volnosti.

obyčejné. diferenciální. rovnice

atd...



Výpočtový model konstrukce mostu – MKP 30 tis. stupňů volnosti



Požadavky na výpočtové modely:

- a) Model má vystihovat (v metodě konečných prvků) nejvěrněji geometrii nosného systému konstrukce,
- b) model musí vystihovat co nejlépe mechanické vlastnosti skutečné konstrukce.

Návrh konstrukce – výkresová dokumentace, geologie, technický popis atd.

Analýza konstrukce s posouzením – výpočet, posouzení podle norem

Experimentální ověření konstrukce – experiment v souladu s předpisy a normami

7.1 Analýza konstrukce – vytvoření matematického popisu konstrukce a zatížení

(abstraktní modely konstrukce a zatížení)

7.1.1 Výpočtové modely:

- Lineární výpočtové modely.
- Nelineární výpočtové modely.

Řešení úloh na výpočtových modelech:

- Analytické řešení – jednoduché modely (∞DOF).
- Numerické řešení – modely konstrukce s konečným stupněm volnosti – části nebo celé konstrukce.

Výpočtové modely buď postihují celou zkoumanou oblast (celou konstrukci včetně okolí) nebo pouze část zkoumané oblasti (stropy, stěny, základy apod.). V případě, že řešíme pouze část konstrukce mluvíme o takzvané metodě subkonstrukcí.

Podle geometrické povahy a způsobu zatížení členíme části konstrukce takto:

- Části (pruty) příhradové konstrukce – prut přenáší pouze tah a tlak.
- Nosníky – pruty přenášející momenty, příčné síly a osově síly.
- Části konstrukce – vedoucí na 2D úlohy – stěny, liniové stavby apod., rotační skořepiny.
- Ohýbané desky – plošné konstrukce zatížené příčným zatížením.

- Části konstrukcí přenášející pouze membránové účinky – tenké skořápky, stanové konstrukce.
- Plošné konstrukce namáhané ohybem a membránovými účinky (stěna, deska).
- Tenké a středně tlusté skořepiny.
- Prostorové úlohy – 3D úlohy (obecná tělesa).



8 Metoda konečných prvků

8.1 Analýza diskrétních soustav

Použije se v případech

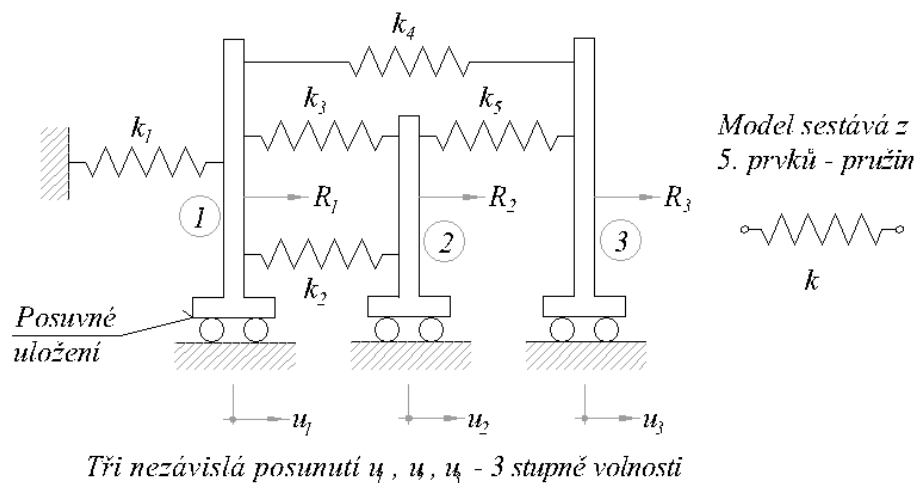
- soustav se soustředěnými parametry (soustavy sestávající z jednoduchých členů – pružiny, tlumiče, soustředěné hmoty, tuhá tělesa apod.),
- soustav, které mají konečný počet stupňů volnosti,
- kdy soustavy rovnic lze sestavit „přímo“.

Analýza sestává z těchto kroků:

1. Idealizace soustavy (konstrukce) – soustava se nahrazuje (idealizuje) soubohem prvků.
2. Rovnováha prvku – podmínky rovnováhy jsou sestaveny pomocí stavových proměnných (hledaných hodnot, uzlových parametrů).
3. Spojení prvků – sestavení soustavy rovnic pro určení hledaných stavových proměnných na základě „propojení“ prvků.
4. Řešení odezvy – po vyřešení soustavy rovnic získáme hodnoty stavových proměnných (parametrů) a z podmínek rovnováhy na prvcích dopočítáme zbývající proměnné (veličiny).

8.1.1 Příklad

Soustava pružných členů (pružin) připojená k tuhým částem.



Závislosti mezi silovými účinky na prvek (pružinu) a posunutími krajních bodů pružiny.

$$k u_b - u_a = f_p,$$

což je síla v pružině.

Pro jednotlivé body a, b platí

$$k_j u_b - u_a = -F_a^j,$$

$$k_j u_b - u_a = F_b^j.$$

Zapsáno maticově

$$k_j \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ u_b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_a^j \\ F_b^j \end{bmatrix}$$

Prvek č. 1

$$k_1 u_1 = F_1^1;$$

Prvek č. 2

$$k_2 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \end{bmatrix};$$

Prvek č. 3

$$k_3 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^3 \\ F_2^3 \end{bmatrix};$$

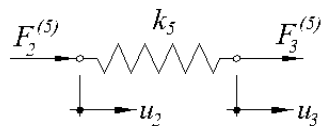
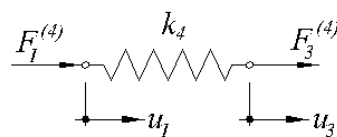
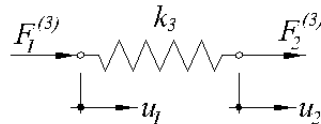
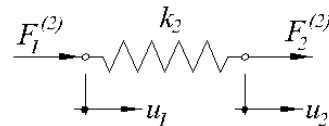
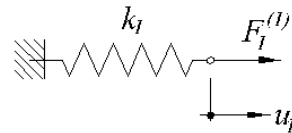
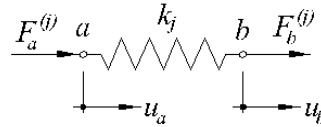
Prvek č. 4

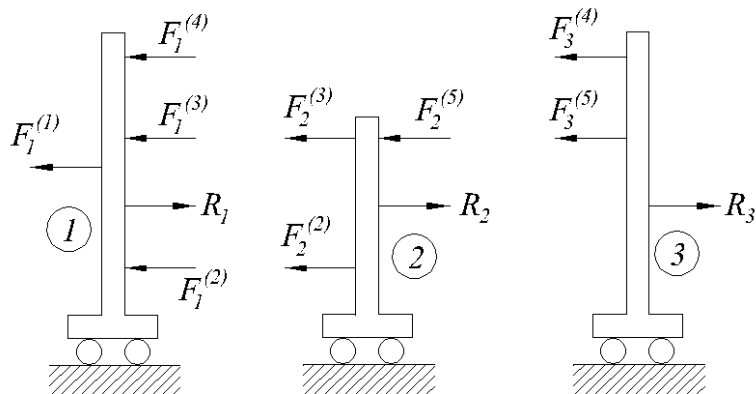
$$k_4 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_1^4 \\ F_3^4 \end{bmatrix};$$

Prvek č. 5

$$k_5 \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_2^5 \\ F_3^5 \end{bmatrix};$$

Statické podmínky rovnováhy vztažené k proměnným u_1, u_2, u_3 . Podmínky rovnováhy pro část 1, 2, 3:





$F_{ix} = 0$: (podmínka rovnováhy pro „vozík“ 1)

$$F_1^1 + F_1^2 + F_1^3 + F_1^4 = R_1$$

$F_{ix} = 0$: (podmínka rovnováhy pro „vozík“ 2)

$$F_2^2 + F_2^3 + F_2^5 = R_2$$

$F_{ix} = 0$: (podmínka rovnováhy pro „vozík“ 3)

$$F_3^4 + F_3^5 = R_3$$

3 stupně volnosti, soustava tří rovnic o třech neznámých.

Za jednotlivé koncové síly prvků F_i^j , $i = 1, 2, 3$, $j = 1, 2, \dots, 5$ dosadíme výrazy vztahující se k prvkům.

Např. $F_1^1 = k_1 u_1$, $F_1^2 = k_2 (u_1 - u_2)$ atd.

Nebo lze také postupovat takto:

Pro 1. prvek platí:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}^1 \mathbf{u} = \mathbf{F}^1$$

Pro 2. prvek platí:

$$\begin{pmatrix} k_2 & -k_2 & 0 \\ -k_2 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1^2 \\ F_2^2 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \mathbf{K}^2 \mathbf{u} = \mathbf{F}^2$$

Pro další prvky se postupuje analogicky.

Vztahy $F_{ix} = 0$ přecházejí na vztah $\mathbf{K} \cdot \mathbf{u} = \mathbf{R}$,

kde

$\mathbf{u}$ je vektor neznámých parametrů (přemístění – stavových proměnných) -
 $\mathbf{u}^T = u_1 \quad u_2 \quad u_3$,

$\mathbf{R}$ je vektor působících sil (zatěžovací vektor) - $\mathbf{R}^T = R_1 \quad R_2 \quad R_3$,

$\mathbf{K}$ je matice tuhosti soustavy (konstrukce)

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} k_1 + k_2 + k_3 + k_4 & -k_2 + k_3 & -k_4 \\ -k_2 + k_3 & k_2 + k_3 + k_5 & -k_5 \\ -k_4 & -k_5 & k_4 + k_5 \end{pmatrix}.$$

Koeficienty matice $\mathbf{K}$ byly získány sumací

$$\mathbf{K} = \sum_{j=1}^5 \mathbf{K}^j.$$

Proces sčítání jednotlivých matic $\mathbf{K}^j$ s cílem získat matici $\mathbf{K}$ celé soustavy (konstrukce) se nazývá přímým postupem – sestavováním rovnic po prvcích.

Po vyčíslení neznámých parametrů (stavových proměnných) u_1, u_2, u_3 lze dopočítat síly na prvcích z podmínek rovnováhy na prvcích.

8.2 Analýza spojitých soustav

Jsou-li známy výrazy pro výpočet matic tuhosti jiných typů prvků, lze postupovat obdobně.

Nejčastěji používaný postup v metodě konečných prvků vychází z deformační metody (řešení v přemístěních) – postup používaný mnoho let při řešení příhradových a rámových konstrukcí.

Základní kroky při řešení příhradových a rámových konstrukcí deformační metodou.

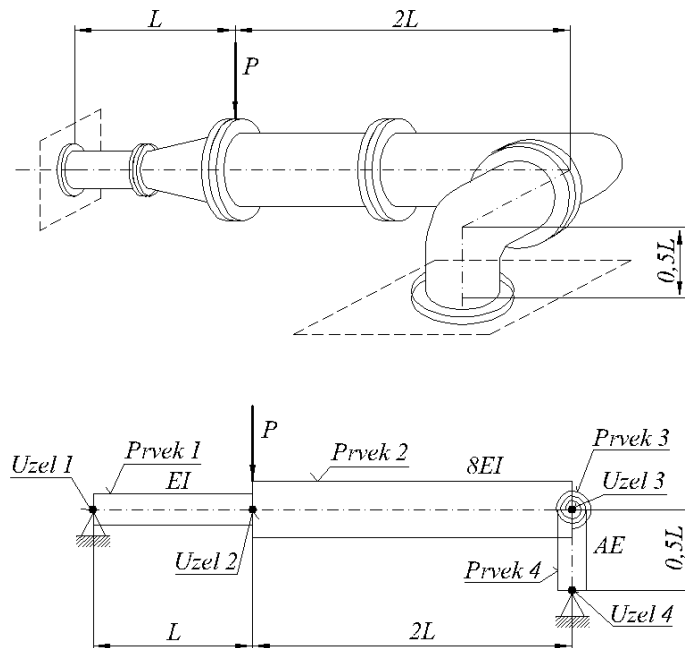
1. Idealizace celé konstrukce souborem nosníkových a příhradových prutů (prvků) spojených mezi sebou ve styčnicích (uzlech).
2. Identifikace neznámých parametrů přemístění v místech spojení. Parametry přemístění plně určují odezvu v přemístěních na idealizované konstrukci (výpočtovém modelu).
3. Sestavení rovnic rovnováhy odpovídající uzlovým přemístěním a následné řešení rovnic.
4. Po vyčíslení koncových hodnot přemístění na nosníkových a příhradových prutech (prvcích) lze dopočítat rozdělení vnitřních sil (napětí) na jednotlivých prvcích.
5. Po analýze hodnot přemístění a napětí lze provést posouzení konstrukce. Je nutno pamatovat na to, že výpočet byl proveden za určitých předpokla-

dů a na idealizované konstrukci (výpočtovém modelu). Celý proces výpočtu je mnohdy nutno několikrát opakovat (návrh $\leftrightarrow$ analýza).

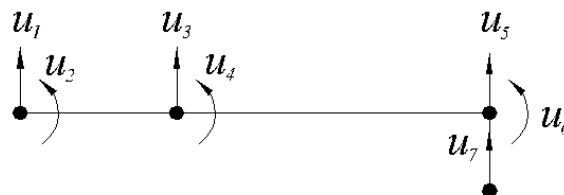
Návrh a analýza jsou nejvýznamnější kroky při řešení skutečné úlohy. Je nutno pamatovat na korektnost vstupních údajů (materiálové vlastnosti, způsob zatěžování apod.).

8.2.1 Příklad – potrubní systém

Potrubní systém je příčně zatížen silou P . Analýza může být provedena velmi detailně s uvážením podrobného výpočtového modelu s nelineárními materiálovými charakteristikami apod. Přesto, velmi často je prováděna analýza na zjednodušených modelech při zjednodušujících předpokladech.



Zjednodušený výpočtový model (prvky a uzly), globální stupně volnosti nepodpřené konstrukce (výpočtového modelu)



Výpočtový model potrubního systému se skládá z nosíkových prvků, příhradového prvku a torzní pružiny.

Pro analýzu systému je nutno znát matice tuhosti prvků v globální souřadnicové soustavě.

Bez okrajových podmínek má soustava 7 stupňů volnosti.

Matice tuhosti jednotlivých prvků v globální souřadné soustavě.

$$K_1^e = \frac{EI}{L} \begin{matrix} & u_1 & u_2 & u_3 & u_4 \\ \frac{12}{L^2} & & \frac{6}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{6}{L} \\ & 4 & -\frac{6}{L} & 2 & \\ SYM. & & \frac{12}{L^2} & -\frac{6}{L} & \\ & & & 4 & \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{matrix}$$

$$K_2^e = \frac{EI}{L} \begin{matrix} & u_3 & u_4 & u_5 & u_6 \\ \frac{12}{L^2} & & \frac{12}{L} & -\frac{12}{L^2} & \frac{12}{L} \\ & 16 & -\frac{12}{L} & 8 & \\ SYM. & & \frac{12}{L^2} & -\frac{12}{L} & \\ & & & 16 & \end{matrix} \begin{matrix} u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \end{matrix}$$

$$K_3^e = k_s u_6$$

$$K_4^e = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & u_5 & u_7 \\ 2 & -2 & \\ -2 & 2 & \end{matrix} \begin{matrix} u_5 \\ u_7 \end{matrix}$$

Matice tuhosti soustavy (konstrukce) se sestaví přímým způsobem.

$$K = {}_j K^j,$$

kde

K je matice tuhosti konstrukce (typu 7,7),

K^j je rozšířená matice prvku (typu 7,7),

Např. pro prvek č. 4

$$\begin{array}{cccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 \mathbf{K}^4 = & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 5 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{2EA}{L} & -\frac{2EA}{L} \\
 & 6 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 & 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{2EA}{L} & \frac{2EA}{L}
 \end{array}$$

Matice tuhosti konstrukce (čísla 1 až 7 jsou čísla stupňů volnosti):

$$\begin{array}{ccccccc}
 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\
 \mathbf{K} & & & & & & & \\
 & \frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & 0 & 0 & 0 \\
 1 & & & & & & & \\
 & & \frac{4EI}{L} & -\frac{6EI}{L^2} & \frac{2EI}{L} & 0 & 0 & 0 \\
 2 & & & & & & & \\
 & & & \frac{24EI}{L^3} & \frac{6EI}{L^2} & -\frac{12EI}{L^3} & \frac{12EI}{L^2} & 0 \\
 3 & & & & & & & \\
 = 4 & & & & \frac{20EI}{L} & -\frac{12EI}{L^2} & \frac{8EI}{L} & 0 \\
 & & & & & & & \\
 5 & & & & & \frac{12EI}{L^3} + \frac{2EA}{L} & -\frac{12EI}{L^2} & -\frac{2EA}{L} \\
 & & & & & & & \\
 6 & & \text{SYM.} & & & & \frac{16EI}{L} + k_s & 0 \\
 & & & & & & & \\
 7 & & & & & & & \frac{2EA}{L}
 \end{array}$$

Rovnice rovnováhy mají tvar

$$\mathbf{Ku} = \mathbf{R},$$

kde

$$\begin{array}{l}
 \mathbf{u}^T = u_1 \quad u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6 \quad u_7, \\
 \mathbf{R}^T = R_1 \quad R_2 \quad R_3 \quad R_4 \quad R_5 \quad R_6 \quad R_7.
 \end{array}$$

Před řešením okrajových podmínek je nutno zadat okrajové podmínky $u_1 = 0$, $u_7 = 0$. Vznikne soustava

$$\mathbf{K}\mathbf{u} = \mathbf{R},$$

kde

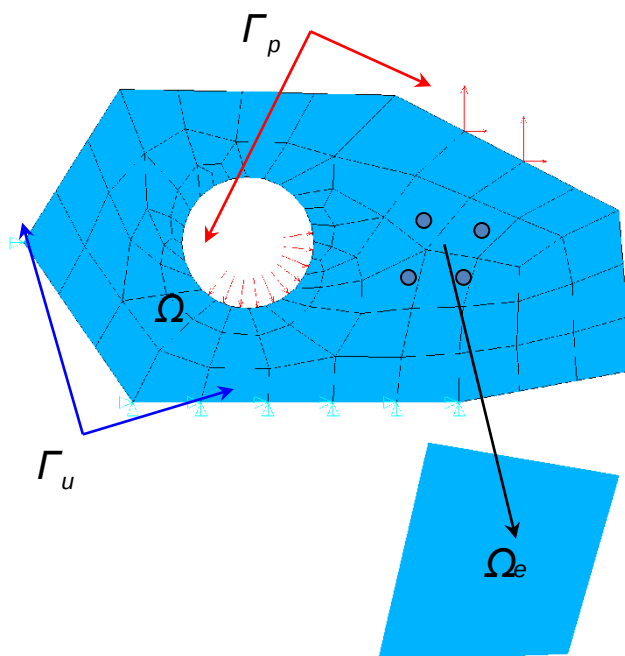
matice $\mathbf{K}$ se získá vyloučením 1. a 7. řádku matice $\mathbf{K}$, podobně

vektor $\mathbf{u}$ bude $\mathbf{u}^T = u_2 \quad u_3 \quad u_4 \quad u_5 \quad u_6$ a

vektor $\mathbf{R}$ bude $\mathbf{R}^T = 0 \quad -P \quad 0 \quad 0 \quad 0$.

Řešením soustavy rovnic se vyčíslí vektor uzlových parametrů $\mathbf{u}$.

Pozn.: Diskretizace metodou konečných prvků



Uvedený příklad ukazuje, jak idealizovanou konstrukci lze sestavit z jednotlivých prvků. Deformační metoda prakticky splývá s metodou konečných prvků. Metoda konečných prvků však dovoluje řešit obecnější případy konstrukcí (2D a 3D úlohy), kdy není známo tzv. „přesné řešení“ v rámci zavedených předpokladů (hypotéz), jak je tomu prutových prvků.

Metoda konečných prvků vychází z Ritz-Galerkinových variačních principů, kdy jsou používány báze funkce aproximující určitá pole v závislosti na zvoleném rozdělení řešené oblasti na konečné prvky. Klasické variační principy (např. Ritzova metoda) hledají součinitele předem zvolených funkcí, které mají obecně nenulové hodnoty v celé řešené oblasti. Formálně se převádí analytické řešení diferenciálních rovnic na řešení algebraických rovnic. Tak je tomu i v

metodě konečných prvků. Pokrok je ve způsobu, kterým se tento převod provádí; matematicky řečeno, ve volbě básových (náhradních aproximačních) funkcí, do kterých jsou rozloženy hledané funkce. Rozklad je úzce vázán na rozdělení řešené oblasti Ω na podoblasti Ω_e , stručně zvané konečné prvky.

Nejčastěji se využívá deformační varianta metody konečných prvků. Jednoduchost použití spočívá v energetickém pojetí úlohy, obecně ve formulaci úlohy jako variační, přičemž se hledá extrém nějakého operátoru (funkcionálu), který má aditivní povahu. To znamená, že jeho hodnota pro celou oblast je rovna součtu hodnot v částech či prvcích soustavy (podoblastech - konečných prvcích).

Tuto povahu mají zejména všechny veličiny dané jakýmkoliv omezeným integrálem v oblasti. Tak například celková energie Π je podle Lagrangeova variačního principu minimální právě pro skutečný stav tělesa $\mathbf{u}, \boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\sigma}$.

Rovnice v metodě konečných prvků lze v tomto případě získat derivováním podle jednotlivých parametrů přemístění $u_1, u_2, \dots, u_n$. Například m -tá rovnice

$$\frac{\partial \Pi}{\partial u_m} = \mathbf{K}_m \mathbf{u} - \mathbf{R}_m = 0$$

Nezáleží jaká je geometrická dimenze prvků $e = 1, p$. Ty se uplatní jen svými maticemi tuhosti $\mathbf{K}^e$ a vektory parametrů zatížení $\mathbf{R}^e$, které mohou mít u různých prvků též soustavy různý rozměr $n^e, n^e, \dots, n^e, 1$. Prvky mohou být 1, 2 a 3 rozměrné, aniž to komplikuje podstatu řešení. V jedné řešené soustavě mohou být obecně např. pruty, deskové, stěnové, případně skořepinové a prostorové prvky. Před sčítáním je formálně nutné přestavět matice $\mathbf{K}^e$ a $\mathbf{R}^e$ na stejný rozměr n, n a $n, 1$, (jak bylo ukázáno výše). Celá soustava lineárních rovnic pro výpočet neznámých parametrů vznikne jednoduše takto:

$$\begin{matrix} \mathbf{K} & \mathbf{u} & = & \mathbf{R} \\ n, n & n, 1 & & n, 1 \end{matrix}$$

kde

$$\begin{matrix} \mathbf{K} & = & \sum_{e=1}^p & \mathbf{K}_r^e \\ n, n & & & n, n \end{matrix},$$

$$\begin{matrix} \mathbf{R} & = & \sum_{e=1}^p & \mathbf{R}_r^e \\ n, 1 & & & \end{matrix},$$

kde

p je počet prvků.

9 MKP - 1D problémy

9.1 Matice tuhosti prutu přihradoviny

9.1.1 Základní postup

Přímý prut konstantního průřezu

Předpoklad: Funkce posunutí na prutu u_x má lineární průběh.

$$u_x = a_0 + a_1 x =$$

$$\begin{matrix} 1, x \\ \mathbf{P} \end{matrix} \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \\ \mathbf{a} \end{matrix}$$

Funkce u_x platí pro všechny body střednice. Tedy

$$u_1 = u_{x_1} = a_0 + a_1 x_1,$$

$$u_2 = u_{x_2} = a_0 + a_1 x_2.$$

Zapsáno maticově

$$\begin{matrix} 1 & x_1 & a_0 \\ 1 & x_2 & a_2 \\ \mathbf{S} & \mathbf{a} & \mathbf{u}_e \end{matrix} = \begin{matrix} a_0 \\ a_2 \\ \mathbf{u}_e \end{matrix}$$

$$\mathbf{S}\mathbf{a} = \mathbf{u}_e \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_e$$

$$\mathbf{a} = \begin{matrix} a_0 \\ a_1 \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{x_1+x_2}{2L} & \frac{1}{2} - \frac{x_1+x_2}{2L} \\ -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \\ \mathbf{u}_e \end{matrix},$$

$$\mathbf{S}^{-1}$$

potom

$$u_x = \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}_e = \mathbf{G}\mathbf{u}_e.$$

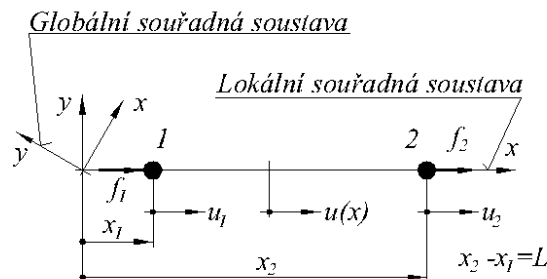
Matice $\mathbf{S}$ se nazývá maticí souřadnic.

Poměrná deformace ε_x na prutu

$$\varepsilon_x = \frac{du_x}{dx} = \begin{matrix} 0 & 1 \end{matrix} \mathbf{S}^{-1} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = \begin{matrix} -\frac{1}{L} & \frac{1}{L} \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix} = \frac{1}{L} \begin{matrix} -1 & 1 \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ u_2 \end{matrix}$$

Poměrná deformace ε_x je v prutu konstantní, rovněž normálové napětí σ_x konstantní

$$\sigma_x = E\varepsilon_x.$$



Potenciální energie deformace prutu

$$U = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \boldsymbol{\varepsilon}_x^T E A \boldsymbol{\varepsilon}_x dx = \frac{1}{2} \int_{x_1}^{x_2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} dx = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix},$$

$\mathbf{K}^e$

kde

$L = x_2 - x_1$ je délka prutu (prvku).

$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} x_2 & 1 & -1 \\ x_1 & -1 & 1 \end{bmatrix} dx$ je matice tuhosti příhradového prutu v lokální souřadné soustavě.

Po integraci

$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ je matice tuhosti prutu.

Výpočet napětí na prutu (prvku)

$$\sigma_x^e = E \varepsilon_x = \frac{E}{L} (u_2 - u_1).$$

Osová síla

$$N^e = \sigma_x^e A = \frac{EA}{L} (u_2 - u_1).$$

Matice tuhosti příhradového prutu v globální soustavě souřadnic xy (rovinová úloha)

Platí:

$$u_1 = u_a \cos \alpha + v_a \sin \alpha,$$

$$u_2 = u_b \cos \alpha + v_b \sin \alpha.$$

Maticově

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \alpha & \sin \alpha \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{bmatrix},$$

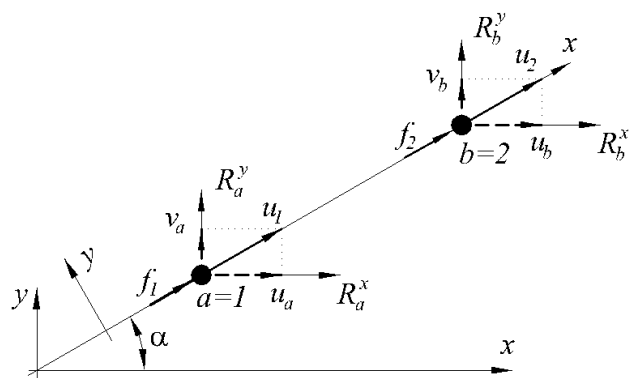
$\mathbf{T}$

kde

$\mathbf{T}$ je transformační matice,

$\mathbf{u}_G^e$ je vektor uzlových posunutí.

Po dosazení výše uvedeného výrazu do výrazu pro potenciální energii deformace



$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{T}^T \mathbf{K}^e \mathbf{T}$$

(4,4) 4,2 2,2 2,4

Po roznásobení a zavedení označení $s = \sin \alpha$, $c = \cos \alpha$

$$\mathbf{K}_G^e = \frac{EA}{L} \begin{matrix} & \begin{matrix} u_a & v_a & u_b & v_b \end{matrix} \\ \begin{matrix} c^2 & sc & -c^2 & -sc \\ s^2 & -sc & -s^2 & sc \\ \text{sym} & & c^2 & sc \\ & & s^2 & v_b \end{matrix} & \begin{matrix} u_a \\ v_a \\ u_b \\ v_b \end{matrix} \end{matrix},$$

kde

$\mathbf{K}_G^e$ je matice tuhosti příhradového prvku pro řešení rovinné úlohy v globálních souřadnicích.

Rovnice rovnováhy na prvku

$$\mathbf{K}_G^e \mathbf{u}_G^e = \mathbf{R}_G^e,$$

kde

$\mathbf{u}_G^e = u_a \quad v_a \quad u_b \quad v_b^T$ je vektor uzlových posunutí v globální souřadné soustavě,

$\mathbf{R}_G^e = R_a^x \quad R_a^y \quad R_b^x \quad R_b^y^T$ je vektor uzlových sil (zatěžovací vektor) v globální souřadné soustavě.

Napětí σ_x

$$\sigma_x = \frac{u_2 - u_1}{L} E = \frac{E}{L} u_b \cos \alpha + v_b \sin \alpha - u_a \cos \alpha - v_a \sin \alpha = \frac{E}{L} u_b - u_a \cos \alpha + v_b - v_a \sin \alpha.$$

Osová síla

$$N = \sigma_x A.$$

9.1.2 Matice tuhosti prutu příhradoviny – odvození pomocí tvarových (přípustných, báзовých) funkcí

$u(x) = \psi_1 u_1 + \psi_2 u_2$ je nejjednodušší funkce aproximující posunutí,

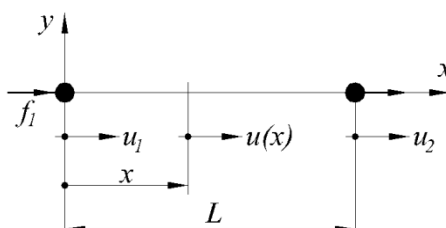
kde

ψ_1, ψ_2 jsou přípustné (tvarové) funkce.

Okrajové podmínky

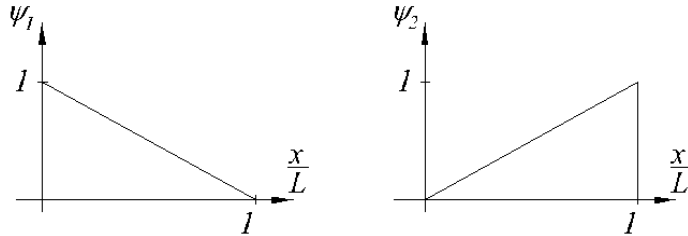
$$u(x=0) = u_1, \quad u(x=L) = u_2.$$

ψ_1 a ψ_2 musí vyhovovat okrajovým podmínkám



$$\psi_1(x=0) = 1, \psi_1(x=L) = 0,$$

$$\psi_2(x=0) = 0, \psi_2(x=L) = 1.$$



Diferenciální rovnice pro osově namáhaný prut konstantního průřezu

$$AE u'(x) = 0.$$

$$u(x) = C_1 + C_2 \frac{x}{L}. \quad (\text{A})$$

Lineární člen je normalizován tak, aby součinitelé C_1 a C_2 měly rozměr funkce $u(x)$.

Platí

$$u(x) = \sum_{i=1}^2 u_i \psi_i = u_1 \psi_1 + u_2 \psi_2 = u_1 \left(1 - \frac{x}{L}\right) + u_2 \frac{x}{L} = u_1 + u_2 - u_1 \frac{x}{L} = C_1 + C_2 \frac{x}{L}.$$

Funkce ψ_1 a ψ_2 vyhovují okrajovým podmínkám i vztahu (A).

Dále platí

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EA u'(x)^2 dx.$$

Po dosazení do výrazu pro potenciální energii deformace aproximační funkce $u(x)$ a úpravě platí

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 \int_0^L EA \psi_i' \psi_j' dx u_i u_j = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^2 \sum_{j=1}^2 k_{ij} u_i u_j,$$

kde

$$k_{ij} = \int_0^L EA \psi_i' \psi_j' dx \text{ jsou členy matice tuhosti.}$$

Potom

$$k_{11} = \int_0^L EA \left(-\frac{1}{L}\right)^2 dx = \frac{EA}{L^2} \int_0^L dx = \frac{EA}{L},$$

$$k_{12} = k_{21} = \int_0^L EA \left(-\frac{1}{L}\right) \left(\frac{1}{L}\right) dx = -\frac{EA}{L},$$

$$k_{22} = \int_0^L EA \left(\frac{1}{L}\right)^2 dx = \frac{EA}{L}.$$

Nakonec

$$\mathbf{K}^e = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{je matice tuhosti prvku.}$$

Vektor zatížení lze určit obdobným způsobem pomocí výrazu

$$\mathbf{p}_i = \int_0^L p(x) \psi_i dx.$$

Poznámka: V případě úloh dynamiky je nutno sestavit matici hmotností prvku $\mathbf{M}^e$. Členy matice $\mathbf{M}^e$ lze získat ze vztahu

$$m_{ij} = \int_0^L \rho A \psi_i \psi_j dx,$$

kde

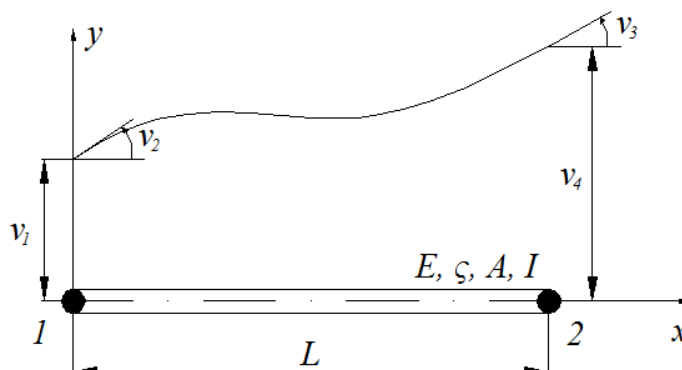
ρ je hustota materiálu.

9.2 Matice tuhosti a vektor zatížení ohýbaného prutu

Odvození pomocí tvarových (přípustných, báзовých) funkcí.

Předpoklady:

- Prut není roztahován ani stlačován. Osa x je totožná s neutrální osou.
- Průřezy kolmé k neutrální ose nedeformovaného prutu zůstávají rovinné a kolmé k neutrální ose i po deformaci. Vliv smyku je zanedbán.
- Materiál je lineárně pružný a nosník je homogenní v libovolném průřezu.
- σ_y a σ_z jsou zanedbatelné vůči σ_x .
- Rovina x - y je hlavní rovinou.



Diferenciální rovnice:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} EI \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} = p(x, t) \Rightarrow EI v'''' = 0$$

(prut je zatížen pouze na koncích)

kde

E je modul pružnosti,

I je moment setrvačnosti,

p je příčné spojitě zatížení.

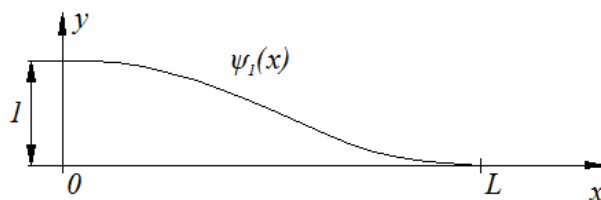
Vzhledem k přemístěním konců prutu

$$v(x) = \sum_{i=1}^4 \psi_i(x) \cdot v_i,$$

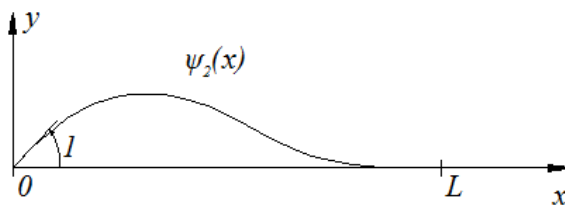
musí funkce $\psi_i(x)$ vyhovovat okrajovým podmínkám.

Tvarové funkce ohýbaného prutu:

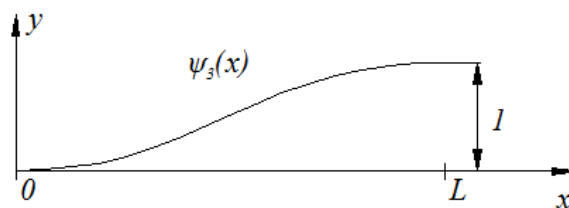
- $\psi_1(x=0) = 1, \psi_1'(x=0) = 0, \psi_1(x=L) = \psi_1'(x=L) = 0$



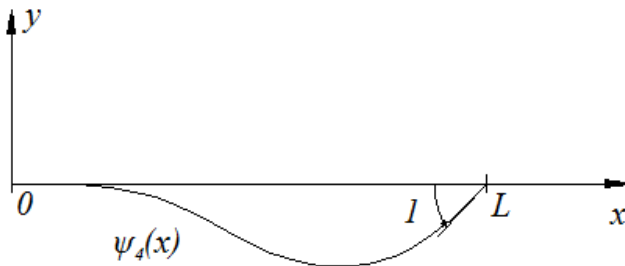
- $\psi_2'(x=0) = 1, \psi_2(x=0) = \psi_2(x=L) = \psi_2'(x=L) = 0$



- $\psi_3(x=L) = 1, \psi_3(x=0) = \psi_3'(x=0) = \psi_3'(x=L) = 0$



- $\psi_4'(x=L) = 1, \psi_4(x=0) = \psi_4'(x=0) = \psi_4(x=L) = 0$



Potom:

$$\psi_1 = 1 - 3 \frac{x}{L} + 2 \frac{x^2}{L^2},$$

$$\psi_2 = x - 2L \frac{x^2}{L^2} + L \frac{x^3}{L^3}, \quad \psi'_2 = 1 - 4L \frac{x}{L^2} + 3L \frac{x^2}{L^3},$$

$$\psi_3 = 3 \frac{x^2}{L^2} - 2 \frac{x^3}{L^3},$$

$$\psi_4 = -L \frac{x^2}{L^2} + L \frac{x^3}{L^3}, \quad \psi'_4 = -2L \frac{x}{L^2} + 3L \frac{x^2}{L^3}.$$

Výrazy pro výpočet matice tuhosti prvku a zatěžovacího vektoru:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L EI v''^2 dx$$

Po dosazení tvarových funkcí:

$$U = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^4 \sum_{j=1}^4 k_{ij} v_i v_j, \quad \text{kde členy matice tuhosti } k_{ij} = \int_0^L EI \psi''_i \psi''_j dx$$

a obdobně $p_i = \int_0^L p(x) \psi_i dx$

Výčíslení matice tuhosti:

$$\psi''_1(x) = -\frac{6}{L^2} + 12 \frac{x}{L^3} = \frac{6}{L^3} \left(-1 + 2 \frac{x}{L} \right)$$

$$k_{11} = \int_0^L EI \left(\frac{6}{L^2} - 1 + 2 \frac{x}{L} \right)^2 dx = \frac{36EI}{L^4} \int_0^L \left(x - 2 \frac{x^2}{L} + \frac{4x^3}{3L^2} \right) dx = \frac{36EI}{L^4} \frac{L}{3} = \frac{12EI}{L^3}$$

Další členy získáme analogicky. Potom má matice tuhosti ohýbaného prutu tvar:

$$K^e = \frac{EI}{L^3} \begin{pmatrix} 12 & 6L & -12 & 6L \\ 6L & 4L^2 & -6L & 2L^2 \\ -12 & -6L & 12 & -6L \\ 6L & 2L^2 & -6L & 4L^2 \end{pmatrix}$$

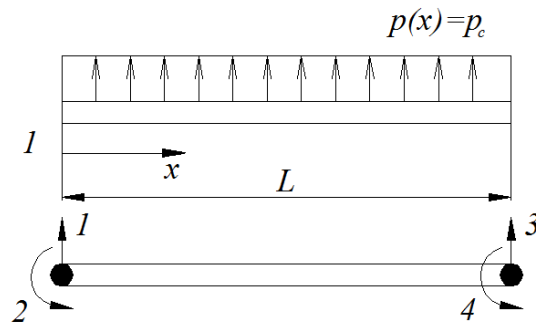
sym

Vyčíslení zatěžovacího vektoru pro prut zatížený příčným rovnoměrně spojitým zatížením:

$$p_i = \int_0^L p_c \psi_i dx$$

$$p_1 = p_c \int_0^L \psi_1 dx = \frac{p_c L}{2}$$

$$R^e = \begin{pmatrix} \frac{p_c L}{2} \\ \frac{p_c L^2}{12} \\ \frac{p_c L}{2} \\ -\frac{p_c L^2}{12} \end{pmatrix}$$



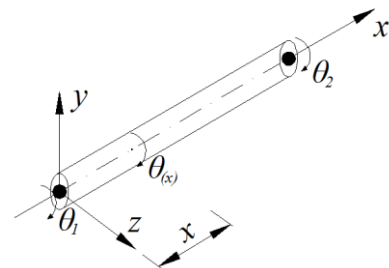
Pro jiné případy funkce příčného zatížení $p(x)$ je postup analogický.

9.3 Matice tuhosti a vektor zatížení krouceného prutu

Potenciální deformace prutu namáhaného pouze kroucením:

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \theta'^2 dx$$

- J – moment setrvačnosti v kroucení
- GJ – torzní tuhost
- $\theta(x)$ – tvarová funkce $\theta(x) = \psi_1(x) \theta_1 + \psi_2(x) \theta_2$

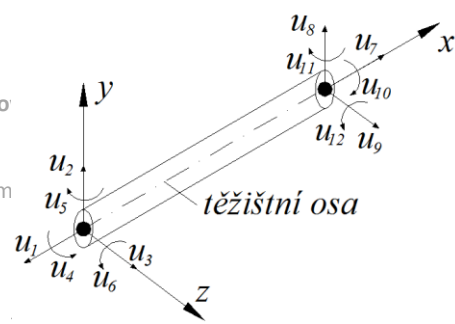


Diferenciální rovnice prutu zatíženého na koncích kroučícím momentem

$$GJ \theta'' = 0$$

$$U = \frac{1}{2} \int_0^L GJ \psi'_i(x) \psi'_j(x) u_i u_j dx = \frac{1}{2} \int_0^L k_{ij} u_i u_j dx$$

$$k_{ij} = \int_0^L GJ \psi'_i(x) \psi'_j(x) dx$$



Po dosazení:

- $\psi_1 = 1 - \frac{x}{L}$
- $\psi_2 = \frac{x}{L}$

Vyčíslení matice tuhosti:

$$K^e = \frac{GJ}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

V případě dvou-uzlového prutu v 3D prostoru je matice tuhosti prvku typu 12x12 a zatěžovací vektor typu 12x1, neboť prostorový prvek popisovaného prutu má celkem 12 stupňů volnosti (v každém uzlu po šesti).

Matice tuhosti prutového prvku v 3D prostoru v soustavě lokálních souřadnic:

$$K^e = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_z}{L^3(1+\phi_y)} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3(1+\phi_z)} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2(1+\phi_y)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2(1+\phi_z)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

=

sym

Vektor zatížení v soustavě lokálních souřadnic:

$$R^e = \begin{matrix} \tau_1 A \\ -\frac{p_y L}{2} \\ -\frac{p_z L}{2} \\ 0 \\ \frac{p_z L^2}{12} + \tau_3 \\ -\frac{p_y L^2}{2} + \tau_2 \\ -\tau_1 A \\ -\frac{p_y L}{2} \\ -\frac{p_z L}{2} \\ 0 \\ -\frac{p_z L^2}{12} + \tau_3 \\ \frac{p_y L^2}{2} + \tau_2 \end{matrix}$$

- $\phi_y = \frac{12EI_z}{GA_{S_y}L^2} = 24 \left(1 + \nu \frac{A}{A_{S_y}} \frac{r_z}{L} \right)^2$
- $\phi_z = \frac{12EI_y}{GA_{S_z}L^2} = 24 \left(1 + \nu \frac{A}{A_{S_z}} \frac{r_y}{L} \right)^2$
- A_{S_y} – smyková plocha ve směru osy y
- A_{S_z} – smyková plocha ve směru osy z
- $\tau_1 = -E \alpha (T_p - T_{ref}) - \varepsilon^{in}$
- $\tau_2 = 2EI_z \alpha \frac{T_{By} - T_c}{t_y}$
- $\tau_3 = 2EI_y \alpha \frac{T_{Tz} - T_c}{t_z}$
- α – součinitel teplotní roztažnosti materiálu
- t_y – tloušťka prvku ve směru osy y
- t_z – tloušťka prvku ve směru osy z
- T_p – průměrná teploty prvku
- T_{ref} – referenční teplota
- T_{by} – povrchová teplota na straně –y
- T_{Tz} – povrchová teplota na straně +z
- T_c – teplota v těžišti
- p – rovnoměrné spojitě zatížení směrem do prvku

$$\mathbf{u} = \mathbf{T}_R \mathbf{u}_G$$

- $\mathbf{u}$ – přemístění v lokální souřadné soustavě
- $\mathbf{u}_G$ – přemístění v globální souřadné soustavě
- $\mathbf{T}_R = \begin{bmatrix} \mathbf{T} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \mathbf{T} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \mathbf{T} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{T} \end{bmatrix}$
- Submatice $\mathbf{T} = \begin{bmatrix} c_1 c_2 & s_1 c_2 & s_2 \\ -c_1 s_2 s_3 - s_1 s_3 & c_1 c_3 - s_1 s_2 s_3 & s_3 c_2 \\ s_1 s_3 - c_1 s_2 c_3 & s_1 s_2 s_3 - c_1 s_3 & c_3 s_2 \end{bmatrix}$
- Podrobnosti o výpočtu $s_1, s_2, s_3, c_1, c_2, c_3$ lze nalézt v literatuře.

Matice tuhosti v soustavě globálních souřadnic:

$$\mathbf{K}_G^e = \mathbf{T}_R^T \mathbf{K}^e \mathbf{T}_R$$

Vektor zatížení v soustavě globálních souřadnic:

$$\mathbf{R}_G^e = \mathbf{T}_R^T \mathbf{R}^e$$

10 Rovinné úlohy

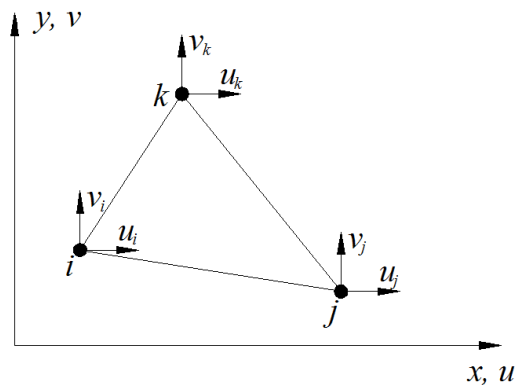
10.1 Matice tuhosti a zatěžovacího vektoru trojúhelníkového prvku

Souřadnice uzlů: $i \ x_i, y_i, j \ x_j, y_j, k \ x_k, y_k$

Uzlové složky zatížení: $R_{ix}, R_{iy}, R_{jx}, R_{jy}, R_{kx}, R_{ky}$

Předpoklad: lineární průběh složek posunutí

- $u(x, y) = a_1x + a_2y + a_3$
- $v(x, y) = a_4x + a_5y + a_6$



Zapsáno maticově:

$$\mathbf{u} = \begin{matrix} u(x, y) \\ v(x, y) \end{matrix} = \begin{bmatrix} x & y & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x & y & 1 \end{bmatrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} = \mathbf{P} \mathbf{a}$$

Funkce $u(x, y)$, $v(x, y)$ platí pro všechny body prvku. Potom lze vyjádřit uvedené vztahy pomocí uzlových parametrů posunutí (6 rovnic o 6 neznámých).

- $u(x_i, y_i) = a_1x_i + a_2y_i + a_3$
- $v(x_i, y_i) = a_4x_i + a_5y_i + a_6$
- $u(x_j, y_j) = a_1x_j + a_2y_j + a_3$
- $v(x_j, y_j) = a_4x_j + a_5y_j + a_6$

- $u_{x_k, y_k} = a_1 x_k + a_2 y_k + a_3$
- $v_{x_k, y_k} = a_4 x_k + a_5 y_k + a_6$

Zapsáno maticově:

$$\mathbf{u}^e = \begin{matrix} u_{x_i, y_i} \\ v_{x_i, y_i} \\ u_{x_j, y_j} \\ v_{x_j, y_j} \\ u_{x_k, y_k} \\ v_{x_k, y_k} \end{matrix} = \begin{matrix} x_i & y_i & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_i & y_i & 1 \\ x_j & y_j & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_j & y_j & 1 \\ x_k & y_k & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & x_k & y_k & 1 \end{matrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} = \mathbf{S} \mathbf{a}$$

- $\mathbf{S}$ – matice souřadnic
- $\mathbf{a}$ – vektor koeficientů

$$\mathbf{u}^e = \mathbf{S} \mathbf{a} \Rightarrow \mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e$$

$$\text{Potom } \mathbf{u}_{x, y} = \mathbf{P} \mathbf{a} = \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e = \mathbf{G} \mathbf{u}^e$$

Výše uvedený vztah popisuje hodnoty funkce posunutí $\mathbf{u}(x, y)$ na prvku v závislosti na hodnotách složek uzlových parametrů posunutí $\mathbf{u}^e$. Dosadíme-li do matice $\mathbf{P}$ souřadnice zvoleného bodu, potom lze podle uvedeného vztahu vyčíslit hodnoty u a v ve zvoleném bodě.

Rovinná napjatost:

$${}^{RN}\boldsymbol{\sigma} = \begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{matrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \begin{matrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{matrix} = {}^{RN}\mathbf{D} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon}$$

Potenciální energie deformace prvku:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\sigma}^T \boldsymbol{\varepsilon} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} {}^{RN}\boldsymbol{\sigma}^T {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon} t d\Omega^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon}^T {}^{RN}\mathbf{D} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon} t d\Omega^e$$

- Ω^e – plocha trojúhelníkového prvku
- t – tloušťka prvku

Dále platí: $\frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon_{xx}$, $\frac{\partial v}{\partial y} = \varepsilon_{yy}$, $\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} = \varepsilon_{xy} \Rightarrow \varepsilon_{xx} = a_1$, $\varepsilon_{yy} = a_5$, $\varepsilon_{xy} = a_2 + a_4$

$$\text{Zapsáno maticově: } {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{matrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \end{matrix} = \mathbf{B} \mathbf{a} = \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e$$

Po dosazení do vztahu pro potenciální energii deformace prvku:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon}^T {}^{RN}\boldsymbol{D} {}^{RN}\boldsymbol{\varepsilon} t d\Omega^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{Te} \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{B}^T {}^{RN}\boldsymbol{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} t d\Omega^e \mathbf{u}^e$$

Matrice tuhosti prvku:

Při konstantní tloušťce a konstantní matici ${}^{RN}\boldsymbol{D}$ v rozsahu jednoho prvku.

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{B}^T {}^{RN}\boldsymbol{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} t d\Omega^e = \mathbf{S}^{-T} \mathbf{B}^T {}^{RN}\boldsymbol{D} \mathbf{B} \mathbf{S}^{-1} t \Omega^e$$

Pozn.: V literatuře lze najít explicitní vyjádření matice $\mathbf{K}^e$. V případě rovinné deformace zaměníme ${}^{RN}\boldsymbol{D}$ za ${}^{RD}\boldsymbol{D}$.

Platí: $\mathbf{u} = \mathbf{P}\mathbf{a} = \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1}\mathbf{u}^e = \boldsymbol{\psi}\mathbf{u}^e$

- $\boldsymbol{\psi}$ – matice tvarových funkcí v oboru jednoho prvku; matice typu (2,6)

$$\boldsymbol{\psi} = \mathbf{P}\mathbf{S}^{-1} = \begin{bmatrix} \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_k & 0 \\ 0 & \psi_i & 0 & \psi_j & 0 & \psi_k \end{bmatrix}$$

Potom lze zapsat:

- $u_{x,y} = \psi_i u_i + \psi_j u_j + \psi_k u_k$
- $v_{x,y} = \psi_i v_i + \psi_j v_j + \psi_k v_k$
- $\psi_i = y_{jk}x + x_{jk} + s_{jk}$
- $\psi_j = y_{ki}x + x_{ik} + s_{ik}$
- $\psi_k = y_{ij}x + x_{ij} + s_{ij}$
- $x_{ab} = x_a - x_b$
- $y_{ab} = y_a - y_b$
- $s_{ab} = x_a y_b - x_b y_a$, kde $a, b = i, j, k$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\begin{aligned}
L^e &= - \int_V \mathbf{X}^{-T} \mathbf{u} dV - \int_{Sp} \mathbf{p}^{-T} \mathbf{u} dS - \int_r \mathbf{R}_r^{-T} \mathbf{u} \\
&= - \int_{\Omega^e} \mathbf{X}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} t d\Omega^e \mathbf{u}^e - \int_{Sp^e} \mathbf{p}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} dS \mathbf{u}^e \\
&\quad - \int_r \mathbf{R}_r^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e \\
&= - \int_{\Omega^e} \mathbf{X}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} t d\Omega^e - \int_{Sp^e} \mathbf{p}^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} dS \\
&\quad - \int_r \mathbf{R}_r^{-T} \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e \\
&= - \int_{\Omega^e} \mathbf{X}^{-T} \boldsymbol{\psi} t d\Omega^e + \int_{Sp^e} \mathbf{p}^{-T} \boldsymbol{\psi} dS - \int_r \mathbf{R}_r^{-T} \boldsymbol{\psi} \mathbf{u}^e
\end{aligned}$$

$$L^e = \mathbf{R}^e \mathbf{u}^e$$

Zatěžovací vektor:

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_{obj.}^e + \mathbf{R}_{pov.}^e + \mathbf{R}_{s.s.}^e.$$

- vektor zatížení od objemových sil

$$\mathbf{R}_{obj.}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{X}^{-T} \boldsymbol{\psi} t d\Omega^e$$

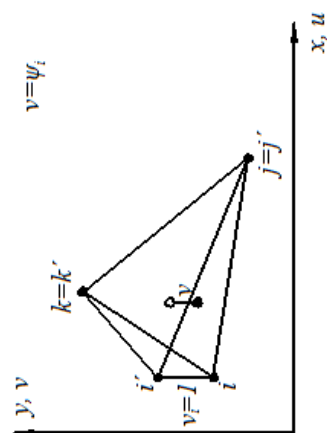
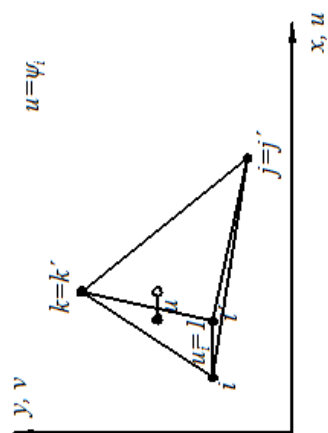
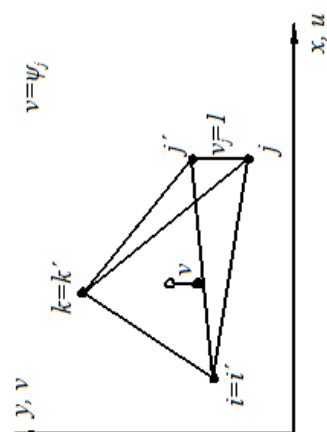
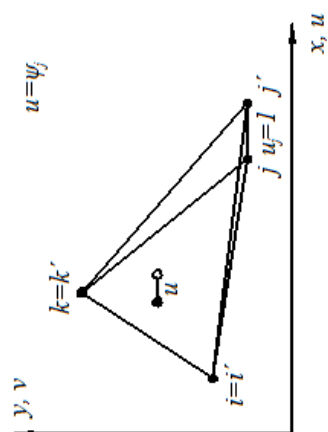
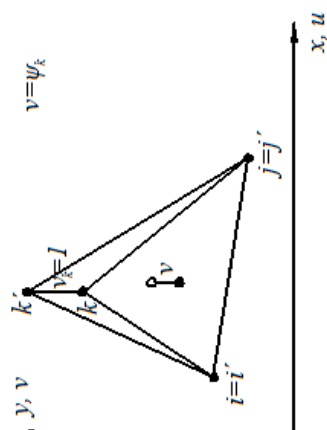
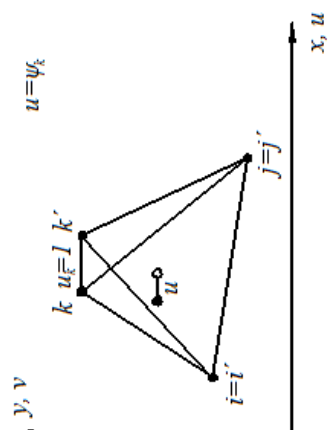
- vektor zatížení od povrchových sil

$$\mathbf{R}_{pov.}^e = \int_{Sp^e} \mathbf{p}^{-T} \boldsymbol{\psi} dS$$

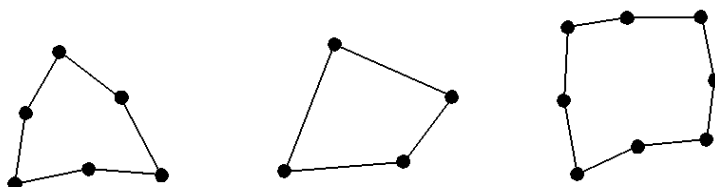
- vektor zatížení od sil v uzlech:

$$\mathbf{R}_{s.s.}^e = \int_r \mathbf{R}_r^T \boldsymbol{\psi}$$

Tvarové funkce a jednotkové parametrické posunutí prvku:

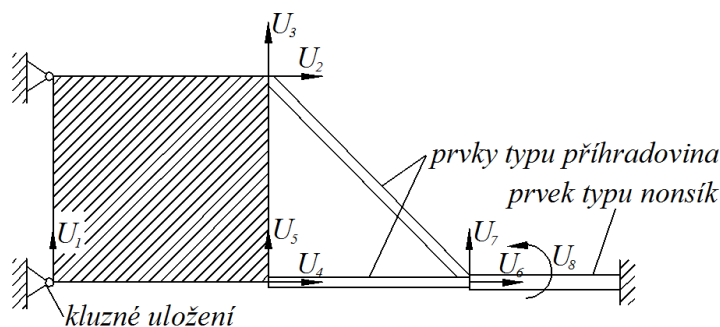


Pozn.: Uvedeným způsobem lze odvodit celou řadu jiných prvků. Prvků vyšší kvality než tříuzlový, prvků s lineární aproximací polí posunutí. Tento prvek se ale v praxi nepoužívá. V praxi se používá trojúhelníkový prvek s kvadratickou aproximační funkcí, tj. prvek se šesti uzly (tři ve vrcholu a tři ve středech stran), nebo prvek čtyřuzlový s lineární aproximací, popř. osmiuzlový s kvadratickou aproximací.



10.2 Matice tuhosti a zatěžovacího vektoru jednoduché konstrukce sestávající z různých typů konečných prvků

Konstrukce sestává ze čtyř prvků tří typů. Má osm stupňů volnosti: $U_1, U_2, \dots, U_8$.

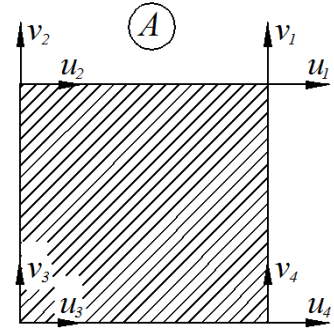


Před sestavením matice tuhosti je nutno konstrukci rozčlenit na jednotlivé konečné prvky.

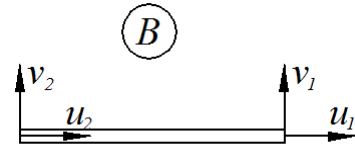
Předpokládáme, že pro každý konečný prvek známe matici tuhosti prvku odpovídající stupňům volnosti. Potom není nutné provádět transformace parametrů z lokální do globální soustavy souřadnic. Vzhledem k uchycení konstrukce se některé lokální stupně volnosti ve výsledné matici tuhosti neuplatní.

10.2.1 Matice tuhosti jednotlivých prvků:

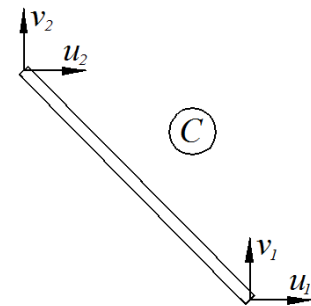
$$K_A = \begin{array}{cc|cc|cc|cc} U_2 & U_3 & & U_1 & U_4 & U_5 & & \\ u_1 & v_1 & & v_3 & u_4 & v_4 & & \\ \hline & a_{11} & a_{12} & \dots & a_{16} & a_{17} & a_{18} & u_1 & U_2 \\ & a_{21} & a_{22} & & a_{26} & a_{27} & a_{28} & v_1 & U_3 \\ & \vdots & & \ddots & & & \vdots & & \\ & a_{61} & a_{62} & & a_{66} & a_{67} & a_{68} & v_3 & U_1 \\ & a_{71} & a_{72} & & a_{76} & a_{77} & a_{78} & u_4 & U_4 \\ & a_{81} & a_{82} & \dots & a_{86} & a_{87} & a_{88} & v_4 & U_5 \end{array}$$



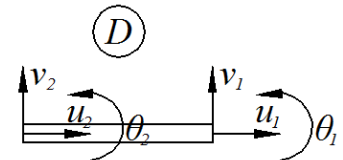
$$K_B = \begin{array}{cc|cc|cc} U_6 & U_1 & U_4 & U_5 & & \\ u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & & \\ \hline & b_{11} & b_{12} & b_{13} & b_{14} & u_1 & U_6 \\ & b_{21} & b_{22} & b_{23} & b_{24} & v_1 & U_1 \\ & b_{31} & b_{32} & b_{33} & b_{34} & u_2 & U_4 \\ & b_{41} & b_{42} & b_{43} & b_{44} & v_2 & U_5 \end{array}$$



$$K_C = \begin{array}{cc|cc|cc} U_6 & U_1 & U_2 & U_3 & & \\ u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & & \\ \hline & c_{11} & c_{12} & c_{13} & c_{14} & u_1 & U_6 \\ & c_{21} & c_{22} & c_{23} & c_{24} & v_1 & U_1 \\ & c_{31} & c_{32} & c_{33} & c_{34} & u_2 & U_2 \\ & c_{41} & c_{42} & c_{43} & c_{44} & v_2 & U_3 \end{array}$$



$$K_D = \begin{array}{cc|cc|cc|cc} & & U_6 & U_1 & U_8 & & & \\ & & u_2 & v_2 & \theta_2 & & & \\ \hline & d_{11} & \dots & & & \dots & & \\ & \vdots & \ddots & & & & & \\ & & & d_{44} & d_{45} & d_{46} & u_2 & U_6 \\ & & & d_{54} & d_{55} & d_{56} & v_2 & U_1 \\ & & & d_{64} & d_{65} & d_{66} & \theta_2 & U_8 \end{array}$$



10.2.2 Matice tuhosti konstrukce se zahrnutím okrajových podmínek

$$u_1^D = v_1^D = \theta_1^D = u_2^A = v_2^A = u_3^A = 0$$

$$K = \begin{matrix} & K_m \\ m & \end{matrix}$$

$$K = \begin{matrix} & a_{66} & a_{61} & a_{62} & a_{61} & a_{63} & 0 & 0 & 0 \\ a_{16} & a_{11} + c_{33} & a_{12} + c_{34} & a_{17} & a_{18} & a_{31} & c_{32} & c & \\ a_{26} & a_{21} + c_{43} & a_{22} + c_{44} & a_{27} & a_{28} & a_{41} & c_{42} & c & \\ = & a_{16} & a_{71} & a_{72} & a_{77} + b_{33} & a_{78} + b_{34} & b_{31} & b_{32} & 0 \\ & a_{36} & a_{81} & a_{82} & a_{87} + b_{43} & a_{22} + b_{44} & b_{41} & b_{42} & 0 \\ & 0 & c_{13} & c_{14} & b_{13} & b_{14} & b_{11} + c_{11} + d_{44} & b_{12} + c_{12} + d_{45} & d_{46} \\ & 0 & c_{23} & c_{24} & b_{23} & b_{24} & b_{21} + c_{21} + d_{54} & b_{22} + c_{22} + d_{55} & d_{56} \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_{64} & d_{65} & d_{66} \end{matrix}$$

Matice tuhosti je čtvercová, symetrická, pásová a pozitivně definitní pro libovolný nenulový vektor U .

$$U^T K U > 0$$

10.2.3 Zatěžovací vektor konstrukce:

Sestavuje se obdobným způsobem z jednotlivých zatěžovacích vektorů prvků R^e .

$$K u = R$$

$$K = \begin{matrix} & p \\ p & \end{matrix} \quad R = \begin{matrix} & p \\ p & \end{matrix}$$

$$K = \begin{matrix} & K_r^e \\ e=1 & \end{matrix}, \quad R = \begin{matrix} & R_r^e \\ e=1 & \end{matrix}$$

- p – počet prvků

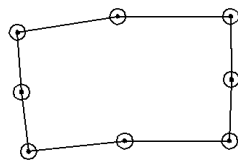
Počet neznámých (stupňů volnosti) definuje počet rovnic. Soustavy rovnic dosahují značných rozměrů a jsou numericky stabilní. Možnosti řešení ovlivňuje velikost operační paměti a velikost pevných disků.

11 Izoparametrické konečné prvky

Předchozí postupy odvození matic tuhosti konečných prvků byly uvedeny z důvodu pochopení samotné metody konečných prvků. Odvození matic tuhosti izoparametrických prvků je trochu odlišné. Pracuje se přímo s danými aproximačními funkcemi. Použití izoparametrických prvků je velmi efektivní a celá řada těchto prvků je zahrnuta v systémech programů na bázi metody konečných prvků. V předchozích postupech se vycházelo ze zvoleného polynomu a při vyčíslení jeho koeficientů bylo nutné provést inverzi matice $\mathbf{S}$. Toto v případě izoparametrických prvků není třeba provádět. Rovněž není nutné vyčíslovat matice $\mathbf{T}$ pro transformaci z lokálního do globálního systému souřadnic.

11.1 Základní pojmy

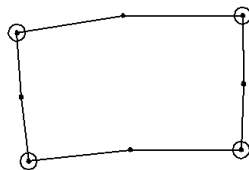
- izoparametrický prvek – geometrie prvku i tvar náhradních (interpolčních) funkcí pro popis hledaných polí jsou definovány stejným počtem



- bod, ve kterém je předepsána souřadnice prvku
- bod (uzel), ve kterém jsou parametry posunuté

parametrů

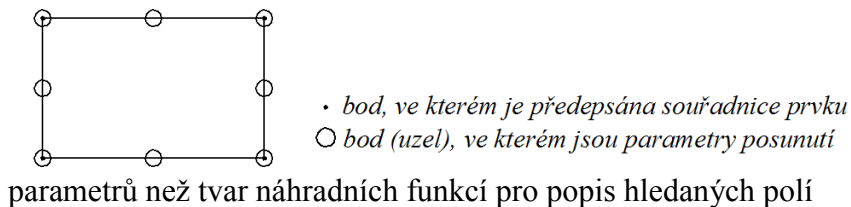
- superparametrický prvek – geometrie prvku je zadána větším počtem



- bod, ve kterém je předepsána souřadnice prvku
- bod (uzel), ve kterém jsou parametry posunuté

parametrů než tvar náhradních funkcí pro popis hledaných polí

- subparametrický prvek – geometrie prvku je zadána menším počtem



11.2 Dvouuzlový konečný prvek příhradoviny

Nejjednodušší případ izoparametrického prvku.

11.2.1 Odvození matice tuhosti

Popis geometrie

$$x = \sum_{i=1}^2 \psi_i x_i = \frac{1}{2} (1 - \xi) x_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) x_2$$

- $\psi_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$
- $\psi_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$

Vztah mezi x a ξ je transformace z lokální soustavy souřadnic ξ do soustavy x . ψ_1 a ψ_2 jsou tvarové (interpolační) funkce. Tyto funkce jsou závislé na počtu uzlů. Jelikož odvozujeme izoparametrický prvek, pak funkce podélného posunutí vyjádříme stejným způsobem.

Popis pole posunutí – 1D prvek

$$u = \sum_{i=1}^2 \psi_i u_i = \frac{1}{2} (1 - \xi) u_1 + \frac{1}{2} (1 + \xi) u_2$$

Je nutno určit ε_{xx} pro dosazení do výrazu pro potenciální energii deformace.

$$\varepsilon_{xx} = \frac{du}{dx} = \frac{du}{d\xi} \frac{d\xi}{dx}$$

- $\frac{du}{d\xi} = -\frac{u_1}{2} + \frac{u_2}{2} = \frac{u_2 - u_1}{2}$
 - 2 – délka prvku v přirozených souřadnicích
- $\frac{d\xi}{dx}$ nelze vyčíslit přímo $\Rightarrow \frac{dx}{d\xi} = -\frac{x_1}{2} + \frac{x_2}{2} = \frac{x_2 - x_1}{2} = \frac{L}{2} \Rightarrow \frac{d\xi}{dx} = \frac{2}{L} \Rightarrow dx = \frac{L}{2} d\xi$
 - $\frac{L}{2}$ – jakobián transformace souřadnic

$$\varepsilon_{xx} = \frac{u_2 - u_1}{2} \frac{2}{L} = \frac{u_2 - u_1}{L}$$

$$\text{Zapsáno maticově: } \varepsilon_{xx} = \frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix}$$

- **B** – funkce přirozených souřadnic – matici tuhosti musíme vyčíslit v přirozeném systému **B** = $\frac{1}{L} \begin{bmatrix} -1 & 1 \end{bmatrix}$

Potenciální energie vnějších sil:

$$\begin{aligned} U^e &= \frac{1}{2} \int_L \sigma_{xx}^T \varepsilon_{xx} A dx \\ &= \int_{x_1}^{x_2} \varepsilon_{xx}^T E \varepsilon_{xx} A dx \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix} d\xi \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} u_1 & u_2 \end{bmatrix} \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} L d\xi \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Matice tuhosti:

$$\begin{aligned} K^e &= \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} L d\xi = \frac{EA}{L^2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \frac{L}{2} d\xi = \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} \xi & -\xi \\ -\xi & \xi \end{bmatrix} \\ &= \frac{EA}{2L} \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{bmatrix} = \frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

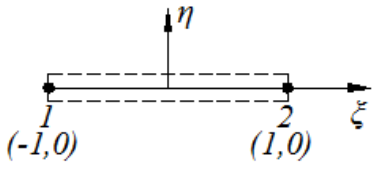
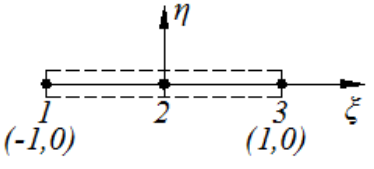
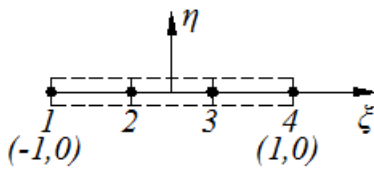
Rovnice rovnováhy na prvku:

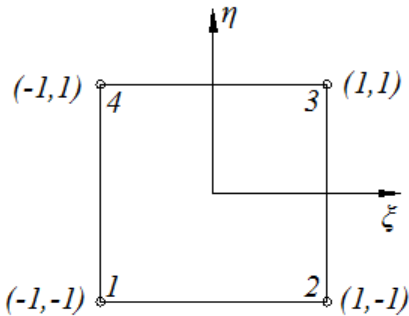
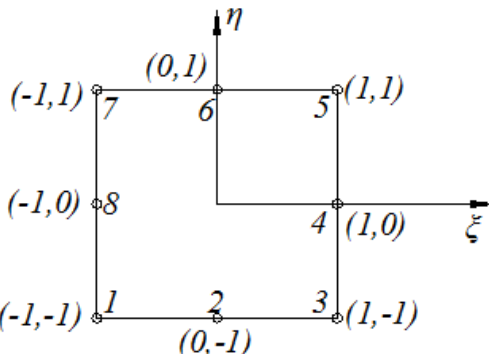
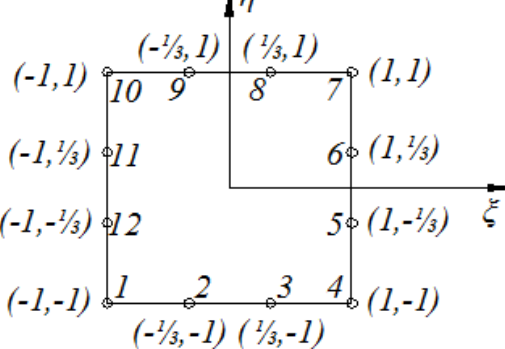
$$Ku = R$$

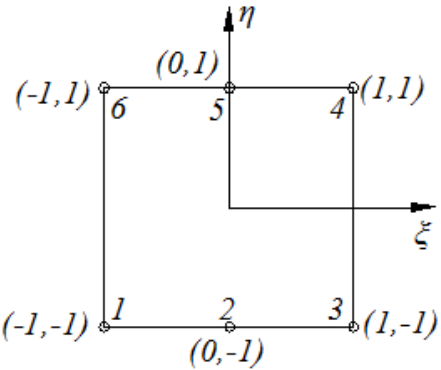
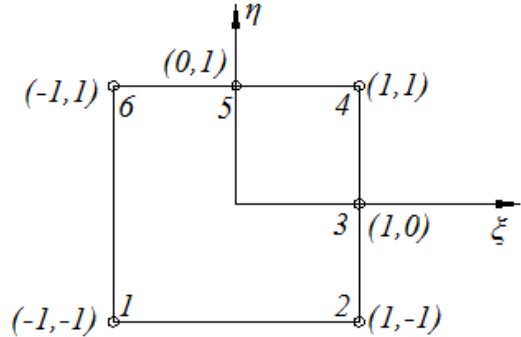
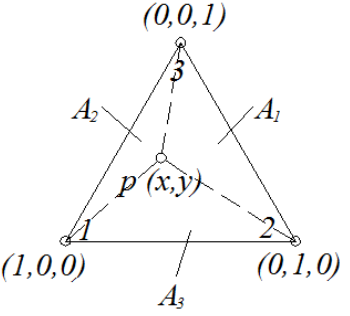
$$\frac{EA}{L} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}$$

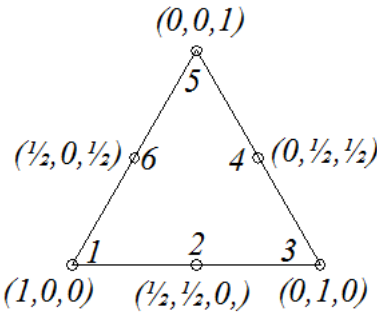
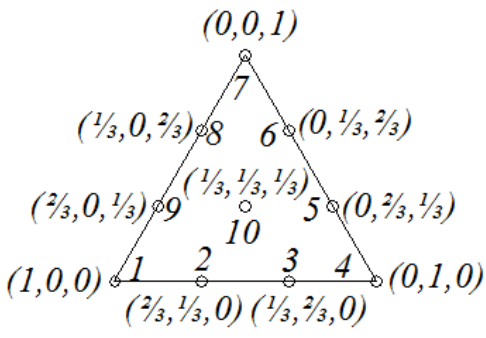
11.3 Tabulka vybraných izoparametrických prvků:

Tvarové funkce $N_i = \psi_i$

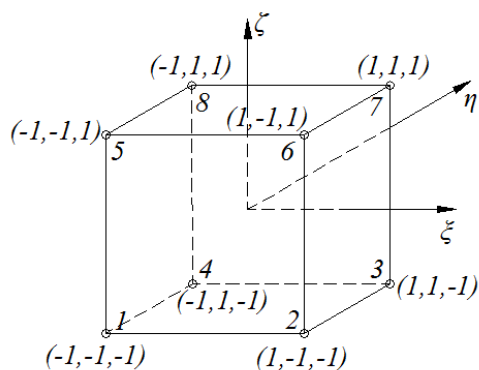
1D	$\xi_0 = \xi_i \xi$
 Dvouzlový lineární	$N_i = \frac{1}{2} (1 + \xi_0), i = 1; 2$ $N_1 = \frac{1}{2} (1 - \xi)$ $N_2 = \frac{1}{2} (1 + \xi)$ • jednoduchá geometrie • konst. deformace
 Tříuzlový parabolický	$N_i = \frac{1}{2} \xi_0 (1 + \xi_0), i = 1; 3$ $N_i = 1 - \xi^2, i = 2$ $N_1 = \frac{1}{2} \xi (1 - \xi)$ $N_2 = 1 - \xi^2$ $N_3 = \frac{1}{2} \xi (1 + \xi)$ • možnost zakřivení
 Čtyřuzlový kubický	$N_i = \frac{1}{16} (1 + \xi_0) (9\xi^2 - 1), i = 1; 4$ $N_i = \frac{9}{16} (1 + 9\xi_0) (1 - \xi^2), i = 2; 3$ • možnost zakřivení
2D	$\xi_0 = \xi_i \xi$ $\eta_0 = \eta_i \eta$

Čtyřuzlový 	$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0), i = 1; 2; 3; 4$ • jednoduchá geometrie • malá přesnost při distorzi
Osmiuzlový 	$N_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (\xi_0 + \eta_0 - 1)$ $i = 1; 3; 5; 7$ $N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0)$ $i = 2; 6$ $N_i = \frac{1}{2} (1 - \eta^2) (1 + \xi_0)$ $i = 4; 8$ • možnost zakřivení
Dvanáctiuzlový 	$N_i = \frac{1}{32} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (-10 + 9\xi^2 + \eta^2)$ $i = 1; 4; 7; 10$ $N_i = \frac{9}{32} (1 + \xi_0) (1 + \eta^2) (1 + 9\eta_0)$ $i = 5; 6; 11; 12$ $N_i = \frac{9}{32} (1 + \eta_0) (1 - \xi^2) (1 + 9\xi_0)$ $i = 2; 3; 8; 9$ • možnost zakřivení • použití v lomové mechanice
Šestiuzlový	$N_i = \frac{\xi_0}{4} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0)$ $i = 1; 3; 4; 6$

	$N_i = \frac{1}{2} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0)$ $i = 2; 5$ • možnost zakřivení • propojení lineárních prvků s parabolickými
Šestiuzlový 	$N_1 = \frac{1}{4} (1 - \xi) (1 - \eta)$ $N_2 = -\frac{\eta}{4} (1 + \xi) (1 - \eta)$ $N_3 = \frac{1}{2} (1 + \xi) (1 - \eta^2)$ $N_4 = \frac{1}{4} (1 + \xi) (1 + \eta) (\xi + \eta - 1)$ $N_5 = \frac{1}{2} (1 + \eta) (1 - \xi^2)$ $N_6 = -\frac{\xi}{4} (1 - \xi) (1 + \eta)$ • možnost zakřivení • propojení lineárních prvků s parabolickými
Tříuzlový trojúhelník 	$N_1 = L_1 = \frac{A_1}{A}$ $N_2 = L_2 = \frac{A_2}{A}$ $N_3 = L_3 = \frac{A_3}{A}$ • L_i – plošné souřadnice • A – plocha prvku • jednoduchá geometrie • konst. deformace • automatické generování prvků složitých oblastí

Šestiuzlový trojúhelník 	$N_1 = L_1 \quad 2L_1 - 1$ $N_2 = 4L_1L_2$ $N_3 = L_2 \quad 2L_2 - 1$ $N_4 = 4L_2L_3$ $N_5 = L_3 \quad 2L_3 - 1$ $N_6 = 4L_3L_1$ • možnost zakřivení • automatické generování prvků složitých oblastí
Devítiuzlový trojúhelník 	$N_1 = \frac{1}{2} \quad 3L_1 - 1 \quad 3L_1 - 2 \quad L_1$ $N_2 = \frac{9}{2} L_1L_2 \quad 3L_1 - 1$ $N_3 = \frac{9}{2} L_1L_2 \quad 3L_2 - 1$ $N_4 = \frac{3}{2} \quad 3L_2 - 1 \quad 3L_2 - 2 \quad L_2$ $N_5 = \frac{9}{2} L_2L_3 \quad 3L_2 - 1$ $N_6 = \frac{9}{2} L_3L_2 \quad 3L_3 - 1$ $N_7 = \frac{1}{2} \quad 3L_3 - 1 \quad 3L_3 - 2 \quad L_3$ $N_8 = \frac{9}{2} L_1L_3 \quad 3L_3 - 1$ $N_9 = \frac{9}{2} L_3L_1 \quad 3L_1 - 1$ $N_{10} = 27L_1L_3L_3$ • možnost zakřivení • automatické generování prvků složitých oblastí • prvek má uzel v těžišti
3D	$\xi_0 = \xi_i \xi$ $\eta_0 = \eta_i \eta$ $\zeta_0 = \zeta_i \zeta$

Osmiuzlový šestistěn

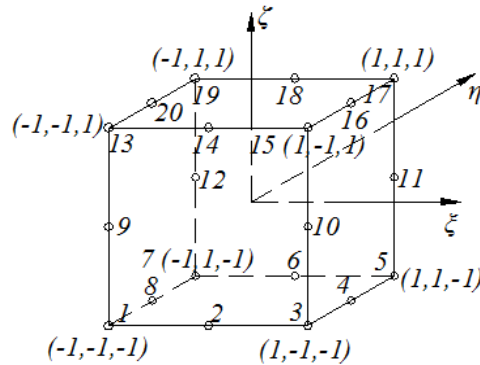


$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0)$$

$$i = 1; 2; \dots 8$$

- jednoduchá geometrie
- relativně malá přesnost při hrubém dělení

Dvacetiuzlový



$$N_i = \frac{1}{8} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) - 2$$

$$i = 1; 3; 5; 7; 13; 15; 17; 19$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \xi^2) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0)$$

$$i = 2; 6; 14; 18$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \eta^2) (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0)$$

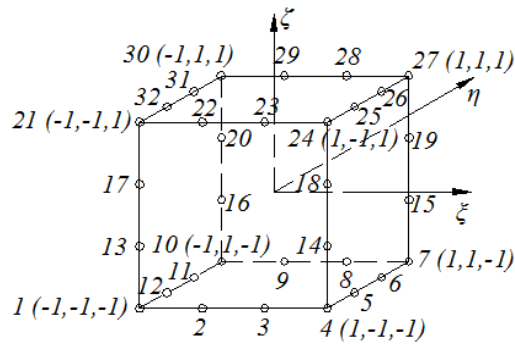
$$i = 4; 8; 16; 20$$

$$N_i = \frac{1}{4} (1 - \zeta^2) (1 + \xi_0) (1 + \eta_0)$$

$$i = 9; 10; 11; 12$$

- možnost zakřivení

Třicetidvouzlový



$$N_i = \frac{1}{64} (1 + \xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0) - 19$$

$$i = 1; 4; 7; 10; 21; 24; 27; 30$$

$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \xi^2) (1 + 9\xi_0) (1 + \eta_0) (1 + \zeta_0)$$

$$i = 2; 3; 8; 9; 22; 28; 29$$

$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \eta^2) (1 + 9\eta_0) (1 + \xi_0) (1 + \zeta_0)$$

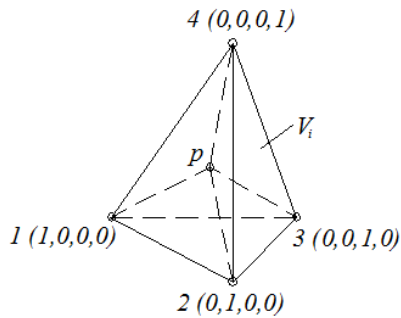
$$i = 5; 6; 11; 12; 25; 26; 31; 32$$

$$N_i = \frac{9}{64} (1 - \zeta^2) (1 + 9\zeta_0) (1 + \xi_0) (1 + \eta_0)$$

$$i = 13; 14; 15; 16; 17; 18; 19; 20$$

- možnost zakřivení

Čtyřuzlový (tetraedr, čtyřstěn)



$$N_1 = L_1 = \frac{V_1}{V}$$

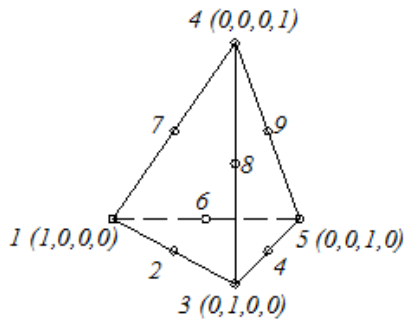
$$N_2 = L_2 = \frac{V_2}{V}$$

$$N_3 = L_3 = \frac{V_3}{V}$$

$$N_4 = L_4 = \frac{V_4}{V}$$

- L_i – objemové souřadnice
- V – objem prvku
- jednoduchá geometrie
- malá přesnost
- automatické generování prvků v prostoru

Desetiuzlový



$$N_1 = L_1 \quad 2L_1 - 1$$

$$N_2 = 4L_1L_2$$

$$N_3 = L_2 \quad 2L_2 - 1$$

$$N_4 = 4L_2L_3$$

$$N_5 = L_3 \quad 2L_3 - 1$$

$$N_6 = 4L_3L_1$$

$$N_7 = 4L_1L_4$$

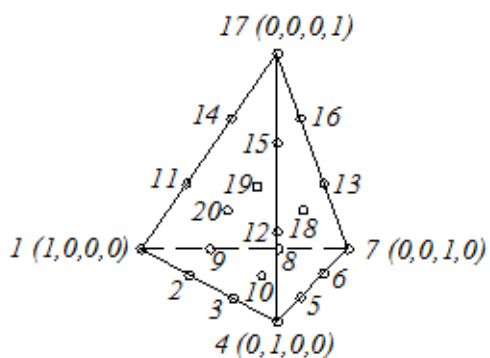
$$N_8 = 4L_2L_4$$

$$N_9 = 4L_3L_4$$

$$N_{10} = L_4 \quad 2L_4 - 1$$

- možnost zakřivení
- automatické generování prvků složitých oblastí

Dvacetiuzlový



$$N_1 = \frac{1}{2} \quad 3L_1 - 1 \quad 3L_1 - 2 \quad L_1$$

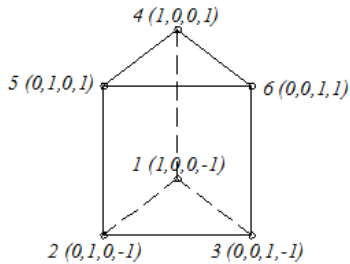
$$N_2 = \frac{9}{2} L_1L_2 \quad 3L_1 - 1$$

$$N_3 = \frac{9}{2} L_1L_2 \quad 3L_2 - 1$$

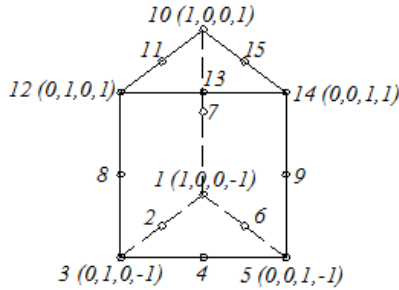
$$N_4 = \frac{1}{2} \quad 3L_2 - 1 \quad 3L_2 - 2 \quad L_2$$

$$N_5 = \frac{9}{2} L_2L_3 \quad 3L_2 - 1$$

$$N_6 = \frac{9}{2} L_2L_3 \quad 3L_3 - 1$$

	$N_7 = \frac{1}{2} 3L_3 - 1 \quad 3L_3 - 2 L_3$ $N_8 = \frac{9}{2} L_3 L_1 \quad 3L_3 - 1$ $N_9 = \frac{9}{2} L_3 L_1 \quad 3L_1 - 1$ $N_{10} = 27L_1 L_2 L_3$ $N_{11} = \frac{9}{2} L_1 L_4 \quad 3L_1 - 1$ $N_{12} = \frac{9}{2} L_2 L_4 \quad 3L_2 - 1$ $N_{13} = \frac{9}{2} L_3 L_4 \quad 3L_3 - 1$ $N_{14} = \frac{9}{2} L_1 L_4 \quad 3L_4 - 1$ $N_{15} = \frac{9}{2} L_2 L_4 \quad 3L_4 - 1$ $N_{16} = \frac{9}{2} L_2 L_4 \quad 3L_2 - 1$ $N_{17} = \frac{1}{2} 3L_4 - 1 \quad 3L_4 - 2 L_4$ $N_{18} = 27L_2 L_3 L_4$ $N_{19} = 27L_1 L_3 L_4$ $N_{20} = 27L_1 L_2 L_4$ • možnost zakřivení • tento prvek má uzly na stěnách
 tiuzlový pětistěn	Šes- $N_i = \frac{1}{2} L_1 \quad 1 - \zeta_0$ $i = 1; 4$ $N_i = \frac{1}{2} L_2 \quad 1 - \zeta_0$ $i = 2; 5$ $N_i = \frac{1}{2} L_3 \quad 1 - \zeta_0$ $i = 3; 6$ • malá přesnost

Patnáctiuzlový



$$N_i = \frac{1}{2} L_2 \quad 2L_2 - 1 \quad 1 + \zeta_0 - \frac{1}{2} L_2 \quad 1 - \zeta^2$$

$$i = 3; 12$$

$$N_i = \frac{1}{2} L_3 \quad 2L_3 - 1 \quad 1 + \zeta_0 - \frac{1}{2} L_3 \quad 1 - \zeta^2$$

$$i = 5; 14$$

$$N_i = 2L_1 L_2 \quad 1 + \zeta_0$$

$$i = 2; 11$$

$$N_i = 2L_2 L_3 \quad 1 + \zeta_0$$

$$i = 4; 13$$

$$N_i = 2L_3 L_1 \quad 1 + \zeta_0$$

$$i = 6; 15$$

$$N_7 = L_1 \quad 1 - \zeta^2$$

$$N_8 = L_2 \quad 1 - \zeta^2$$

$$N_9 = L_3 \quad 1 - \zeta^2$$

- všechny prvky tvaru pětistěnu jsou prvky pro propojení oblastí typu „brick“ a „tet“

Propojení šestistěnu se čtyřstěnem není korektní. V současné době se používá propojení pomocí pětistěnu typu pyramida.

11.4 Matice tuhosti a zatěžovací vektor čtyřuzlového izoparametrického prvku pro řešení úlohy rovinné napjatosti

11.4.1 Interpoláční funkce

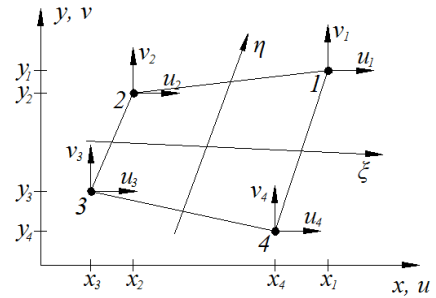
Pro odvození matice tuhosti je třeba vybrat interpolační (tvarové) funkce ψ_1, ψ_2, ψ_3 a ψ_4 .

$$\psi_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi_0 & 1 + \eta_0 \end{bmatrix}, i = 1; 2; 3; 4$$

- $\xi_0 = \xi_i \xi$
- $\eta_0 = \eta_i \eta$

Po dosazení hodnot souřadnic uzlů – přirozených souřadnic ξ a η dostáváme tvarové funkce prvku:

- $\psi_1 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix}$
- $\psi_2 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \eta \end{bmatrix}$
- $\psi_3 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 - \eta \end{bmatrix}$
- $\psi_4 = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 - \eta \end{bmatrix}$



11.4.2 Vztahy pro popis souřadnic:

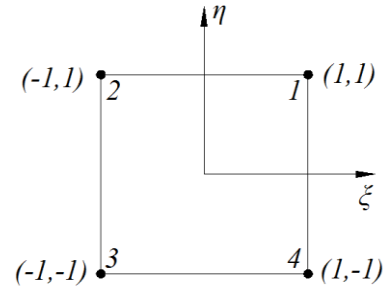
$$x = \sum_{i=1}^4 \psi_i x_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} x_1 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} x_2 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} x_3 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} x_4$$

$$y = \sum_{i=1}^4 \psi_i y_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} y_1 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} y_2 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} y_3 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} y_4$$

V každém uzlu jsou dva parametry posunutí:

$$u = \sum_{i=1}^4 \psi_i u_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} u_1 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} u_2 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} u_3 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} u_4$$

$$v = \sum_{i=1}^4 \psi_i v_i = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} v_1 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 + \eta \end{bmatrix} v_2 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 - \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} v_3 + \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 + \xi & 1 - \eta \end{bmatrix} v_4$$



Je zřejmé, že $x = f_1 \xi, \eta, y = f_2 \xi, \eta$ a opačně $\xi = f_3 x, y, \eta = f_4 x, y$.

Do výrazu pro potenciální energii deformace v rovinné úloze vstupují:

- $\varepsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}$
- $\varepsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}$
- $\varepsilon_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}$

Je nutné uplatnit pravidlo pro derivování složené funkce:

- $\frac{\partial}{\partial x} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$
- $\frac{\partial}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$

Aby se dalo vyčíslit $\frac{\partial \xi}{\partial x}, \frac{\partial \xi}{\partial y}, \frac{\partial \eta}{\partial x}$ a $\frac{\partial \eta}{\partial y}$ je nutno znát inverzní transformace. Tyto transformace se v explicitním vyjádření těžce hledají. Proto nejprve vyčíslíme:

- $\frac{\partial}{\partial \xi} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi}$
- $\frac{\partial}{\partial \eta} = \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta}$

Maticově zapsáno:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix}$$

- J – jakobián transformace: $J = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$

Pro inverzní transformaci platí:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \end{pmatrix} = J^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

- $J^{-1} = \begin{pmatrix} J_{11} & J_{12} \\ J_{21} & J_{22} \end{pmatrix}$

Pomocné výpočty:

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} (1 + \eta) = -\frac{\partial \psi_1}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \xi} = -\frac{1}{4} (1 - \eta)$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 - \xi)$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 - \eta) = -\frac{\partial \psi_3}{\partial \xi}$$

$$\frac{\partial \psi_3}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} (1 - \xi) = -\frac{\partial \psi_2}{\partial \eta}$$

$$\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi)$$

$$\frac{\partial \psi_4}{\partial \eta} = -\frac{1}{4} (1 + \xi) = -\frac{\partial \psi_1}{\partial \eta}$$

Pro libovolný bod prvku platí:

- $\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta) x_1 - \frac{1}{4} (1 + \eta) x_2 - \frac{1}{4} (1 - \eta) x_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta) x_4 = J_{11}$
- $\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) x_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) x_2 - \frac{1}{4} (1 - \xi) x_3 - \frac{1}{4} (1 + \xi) x_4 = J_{21}$
- $\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta) y_1 - \frac{1}{4} (1 + \eta) y_2 - \frac{1}{4} (1 - \eta) y_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta) y_4 = J_{12}$
- $\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) y_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) y_2 - \frac{1}{4} (1 - \xi) y_3 - \frac{1}{4} (1 + \xi) y_4 = J_{22}$

Obdobným způsobem platí:

- $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta) u_1 - \frac{1}{4} (1 + \eta) u_2 - \frac{1}{4} (1 - \eta) u_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta) u_4$
- $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) u_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) u_2 - \frac{1}{4} (1 - \xi) u_3 - \frac{1}{4} (1 + \xi) u_4$
- $\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{4} (1 + \eta) v_1 - \frac{1}{4} (1 + \eta) v_2 - \frac{1}{4} (1 - \eta) v_3 + \frac{1}{4} (1 - \eta) v_4$
- $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{4} (1 + \xi) v_1 + \frac{1}{4} (1 - \xi) v_2 - \frac{1}{4} (1 - \xi) v_3 - \frac{1}{4} (1 + \xi) v_4$

Z teorie pružnosti platí:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} \\ \varepsilon_{yy} \\ \varepsilon_{xy} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial x} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} \\ \frac{\partial v}{\partial y} \\ \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \end{pmatrix}$$

11.4.3 Energie deformace prvku:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{V^e} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dV$$

- $\mathbf{D}$ – matice pružnostních konstant

$$\circ \text{ Rovinná napjatost: } \mathbf{D}^{RN} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

○ Rovinná deformace: $\mathbf{D}^{RD} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \begin{matrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} \end{matrix}$

○ Rotačně symetrická úloha:

$$\mathbf{D}^{RS} = \frac{E}{1+\nu} \frac{1-\nu}{1-2\nu} \begin{matrix} 1 & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ \frac{\nu}{1-\nu} & 1 & 0 & \frac{\nu}{1-\nu} \\ 0 & 0 & \frac{1-2\nu}{2(1-\nu)} & 0 \\ \frac{\nu}{1-\nu} & \frac{\nu}{1-\nu} & 0 & 0 \end{matrix}$$

Pomocné výpočty:

- $\frac{\partial u}{\partial x} = J_{11} \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{12} \frac{\partial u}{\partial \eta}$
- $\frac{\partial v}{\partial y} = J_{21} \frac{\partial v}{\partial \xi} + J_{22} \frac{\partial v}{\partial \eta}$
- $\frac{\partial v}{\partial x} = J_{11} \frac{\partial v}{\partial \xi} + J_{12} \frac{\partial v}{\partial \eta}$
- $\frac{\partial u}{\partial y} = J_{21} \frac{\partial u}{\partial \xi} + J_{22} \frac{\partial u}{\partial \eta}$

V uvedených výrazech je nutno rozepsat členy $\frac{\partial u}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial v}{\partial \xi}, \frac{\partial u}{\partial \xi}$ pomocí uzlových hodnot $\mathbf{u}^e$:

$$\mathbf{u}^{eT} = \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix}$$

- $\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 0 & -(1-\eta) & 0 & 1-\eta & 0 \end{matrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{u}_\xi \mathbf{u}^e$
- $\frac{\partial v}{\partial \xi} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 0 & 1+\eta & 0 & -(1+\eta) & 0 & -(1-\eta) & 0 & 1-\eta \end{matrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{v}_\xi \mathbf{u}^e$
- $\frac{\partial u}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 & -(1-\xi) & 0 & 1+\xi & 0 \end{matrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{u}_\eta \mathbf{u}^e$
- $\frac{\partial v}{\partial \eta} = \frac{1}{4} \begin{matrix} 0 & 1+\xi & 0 & 1-\xi & 0 & -(1-\xi) & 0 & 1+\xi \end{matrix} \mathbf{u}^e = \mathbf{v}_\eta \mathbf{u}^e$

Potom:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{matrix} J_{11} \mathbf{u}_\xi + J_{12} \mathbf{u}_\eta \\ J_{21} \mathbf{v}_\xi + J_{22} \mathbf{v}_\eta \\ J_{21} \mathbf{u}_\xi + J_{22} \mathbf{u}_\eta + J_{11} \mathbf{v}_\xi + J_{12} \mathbf{v}_\eta \end{matrix} \mathbf{u}^e$$

$$\begin{aligned}
 U^e &= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} t \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} dx dy \\
 &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \int_{\Omega^e} t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} dx dy \mathbf{u}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \mathbf{u}^e
 \end{aligned}$$

11.4.4 Matice tuhosti prvku:

$$\mathbf{K}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 t \mathbf{F} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

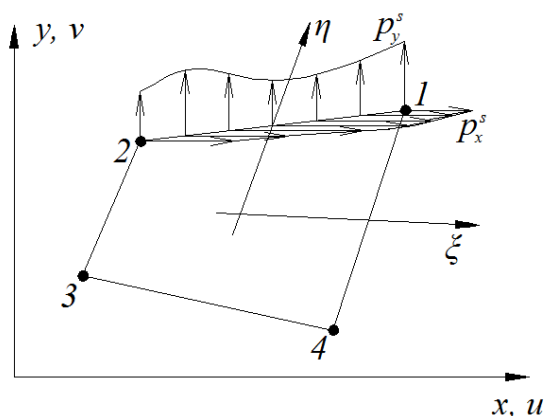
Integraci nelze provést přímo, proto je nutné použít numerickou integraci (Gaussovu integraci).

$$\mathbf{K}^e = \sum_{i=1}^{int} \sum_{j=1}^{int} t_{ij} w_i w_j \mathbf{F}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij}$$

- ξ_i, η_i – souřadnice integračních bodů
- w_i, w_j – váhové koeficienty v odpovídajících integračních bodech

11.4.5 Vyčíslení vektoru zatížení od působení povrchového zatížení na straně 1-2 pro čtyřuzlový prvek

Nejprve je nutno stanovit, jakým způsobem se mění funkce posunutí. Protože na straně 1-2 je $\eta = 1$, potom vzhledem k interpolačním funkcím pro čtyřuzlový izoparametrický prvek platí:



- $u^s = \frac{1}{2} (1 + \xi) u_1 + \frac{1}{2} (1 - \xi) u_2$
- $v^s = \frac{1}{2} (1 + \xi) v_1 + \frac{1}{2} (1 - \xi) v_2$

Zapsáno maticově:

$$\begin{matrix} u^s \\ v^s \end{matrix} = \begin{matrix} \frac{1}{2} & 1+\xi & 0 & \frac{1}{2} & 1-\xi & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1+\xi & 0 & \frac{1}{2} & 1-\xi \end{matrix} \begin{matrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \end{matrix}$$

Obecněji

$$\mathbf{H}_{1-2}^s = \begin{matrix} \frac{1}{2} & 1+\xi & 0 & \frac{1}{2} & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & 1+\xi & 0 & \frac{1}{2} & 1-\xi & 0 & 0 & 0 & 0 \end{matrix} \begin{matrix} u_1 & v_1 & u_2 & v_2 & u_3 & v_3 & u_4 & v_4 \end{matrix}$$

Složky povrchových sil ve směrech x,y:

$$\mathbf{p}_{1-2}^s = \begin{matrix} p_x^s \\ p_y^s \end{matrix}$$

$$\mathbf{R}_{1-2}^e = \int_{\Gamma_{1-2}^e} \mathbf{H}_{1-2}^s{}^T \mathbf{p}_{1-2}^s d\Gamma^e$$

- $d\Gamma^e = t^e dL$
- t^e – tloušťka prvku
- dL – diferenciál délky

$$dL = \sqrt{\left(\frac{dx}{d\xi}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\eta}\right)^2} d\xi$$

Za předpokladu, že $\eta = 1$, potom $\frac{dx}{d\xi} = \frac{x_2 - x_1}{2}$ a $\frac{dy}{d\eta} = \frac{y_2 - y_1}{2}$.

$$\begin{aligned} \mathbf{R}_{1-2}^e &= \int_{\Gamma_{1-2}^e} \mathbf{H}_{1-2}^s{}^T \mathbf{p}_{1-2}^s d\Gamma^e = \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{1-2}^s{}^T \mathbf{p}_{1-2}^s \sqrt{\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y_2 - y_1}{2}\right)^2} t^e d\xi \\ &= \int_{-1}^1 \mathbf{H}_{1-2}^s{}^T \mathbf{p}_{1-2}^s \frac{L_{1-2}}{2} t^e d\xi = \int_{-1}^1 \mathbf{F} t^e d\xi \end{aligned}$$

Pro všechny čtyři zatížené strany platí:

$$\mathbf{R}^e = \mathbf{R}_{1-2}^e + \mathbf{R}_{2-3}^e + \mathbf{R}_{3-4}^e + \mathbf{R}_{4-1}^e$$

V případě jednoduchých funkcí zatížení lze získat zatěžovací vektor přímo.

V obecném případě je nutno použít numerickou integraci.

$$\mathbf{R}_{1-2}^e = \int_{int} w_i t_i^e \mathbf{F}_i$$

Integrace se provádí pouze s jednou proměnnou, protože $\eta = konst.$

11.4.6 Matice hmotnosti čtyřuzlového izoparametrického prvku

Při odvození matice hmotnosti se vychází z výrazu pro kinetickou energii prvku.

$$\begin{aligned} K^e &= \frac{1}{2} \int_{V^e} \rho^e \mathbf{u}^T \mathbf{u} dV = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \rho^e t^e \mathbf{u}^T \mathbf{u} dx dy \\ &= \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^e t^e \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det \mathbf{J} d\xi d\eta \mathbf{u}^e = \frac{1}{2} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{M}^e \mathbf{u}^e \end{aligned}$$

Matice hmotnosti prvku:

$$\mathbf{M}^e = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^e t^e \mathbf{H}^T \mathbf{H} \det \mathbf{J} d\xi d\eta = \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \rho^e t^e \mathbf{F} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

Odvození vycházelo z výrazu:

$$\begin{aligned} \mathbf{u} &= \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1+\xi & 1+\eta & 0 & 0 \\ 0 & 1+\xi & 1+\eta & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_4 \end{bmatrix} \\ &= \mathbf{H} \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_4 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

- $\mathbf{H}$ – aproximační funkce

Výpočet matice hmotnosti numerickou integrací:

$$\mathbf{M}^e = \int_{i=1}^{int} \int_{i=1}^{int} \rho_{ij} t_{ij} w_i w_j \mathbf{F}_{ij} \det \mathbf{J}_{ij}$$

11.4.7 Gaussova numerická integrace v případě integrace na prvcích

1D úloha:

$$\int_{-1}^1 F(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i F(\xi_i)$$

2D úloha:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j)$$

3D úloha:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p w_i w_j w_k \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

Indexy n, m, p ukazují na možnost použít různá integrační shémata ve směrech ξ, η, ζ .

12 Numerická integrace

Důležitým krokem v případě izoparametrických prvků je numerická integrace. Požadované maticové integrály při výpočtu konečných prvků včetně jejich numerického řešení lze pro případ 1D, 2D nebo 3D úlohy zapsat takto:

$$\int_{\xi} \mathbf{F}(\xi) d\xi = \sum_i w_i \mathbf{F}(\xi_i) + \mathbf{R}_n$$

$$\int_{\xi, \eta} \mathbf{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j w_{ij} \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j) + \mathbf{R}_n$$

$$\int_{\xi, \eta, \zeta} \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k) + \mathbf{R}_n$$

- $w_i, w_{ij} = w_i w_j, w_{ijk} = w_i w_j w_k$ – váhové koeficienty
- $\mathbf{F}(\xi_i), \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j), \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$ – matice, jejichž členy jsou vyčíslovány v integračních bodech
- $\mathbf{R}_n$ – matice chyby, která se obvykle nevyčísluje:

$$\int_{\xi} \mathbf{F}(\xi) d\xi = \sum_i w_i \mathbf{F}(\xi_i)$$

$$\int_{\xi, \eta} \mathbf{F}(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_i \sum_j w_{ij} \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j)$$

$$\int_{\xi, \eta, \zeta} \mathbf{F}(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_i \sum_j \sum_k w_{ijk} \mathbf{F}(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

Přesnost integrace je dána počtem požadovaných integračních bodů při výpočtu matic prvku.

12.1 Jednorozměrný případ

Izoparametrický prvek: $a = -1, b = 1$

$$\int_a^b \mathbf{F}(\xi) d\xi$$

Numerická integrace integrálu je založena na získání polynomu $\psi(\xi)$ vyhovujícímu zadaným hodnotám $F(\xi)$. Potom $\int_a^b \psi(\xi) d\xi$ je aproximací $\int_a^b F(\xi) d\xi$.

Počet hodnot $F(\xi)$ a pozice vybraných bodů v intervalu od a do b určují přibližně $\psi(\xi)$ k $F(\xi)$ a tím i přesnost integrace.

12.1.1 Interpolace pomocí polynomů

Předpokládejme, že $F(\xi)$ je vyčíslována v $n + 1$ různých bodech $\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n$. Potom získáme $F_0, F_1, \dots, F_n$. Polynom $\psi(\xi)$ odpovídá těmto hodnotám a lze jej jednoznačně vyjádřit ve tvaru:

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2 + \dots + a_n\xi^n$$

Z předpokladu, že $\psi(\xi) = F(\xi)$ v $n + 1$ bodech interpolace získáme $\mathbf{F} = \mathbf{S}\mathbf{a}$

- $\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_0 & F_1 & \dots & F_n \end{bmatrix}^T$
- $\mathbf{a} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_n \end{bmatrix}^T$
- $\mathbf{S}$ – Vandermondova matice: $\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 1 & \xi_0 & \xi_0^2 & \dots & \xi_0^n \\ 1 & \xi_1 & \xi_1^2 & \dots & \xi_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & \xi_n & \xi_n^2 & \dots & \xi_n^n \end{bmatrix}$
- Protože $\det \mathbf{S} \neq 0$ (body ξ_i jsou různé), máme jediné řešení $\mathbf{a}$

Existuje však efektivnější způsob, jakým lze získat interpolační polynom $\psi(\xi)$. Tento postup se nazývá Lagrangeho interpolace.

Jednotlivé funkce $1, \xi, \xi^2, \dots, \xi^n$ vytváří vektorový prostor V o dimenzi $n + 1$ a $\psi(\xi)$ je prvkem tohoto prostoru. Protože určení souřadnic $a_0, a_1, \dots, a_n$ pro $\psi(\xi)$ může být značně komplikované, je vhodné stanovit jinou bázi v prostoru V , ve kterém bude výpočet souřadnic jednodušší. Tato báze je tvořena Lagrangeovými interpolačními polynomy ve tvaru:

$$l_j = \frac{\xi - \xi_0}{\xi_j - \xi_0} \frac{\xi - \xi_1}{\xi_j - \xi_1} \dots \frac{\xi - \xi_{j-1}}{\xi_j - \xi_{j-1}} \frac{\xi - \xi_{j+1}}{\xi_j - \xi_{j+1}} \dots \frac{\xi - \xi_n}{\xi_j - \xi_n}$$

- $l_j(\xi_i) = \delta_{ij}$ – Kroneckerovo delta
 - $\delta_{ij} = 1$ pro $i = j$
 - $\delta_{ij} = 0$ pro $i \neq j$

Potom souřadnicemi bázevého vektoru jsou hodnoty $F(\xi)$ a polynom $\psi(\xi)$ má tvar:

$$\psi(\xi) = F_0 l_0(\xi) + F_1 l_1(\xi) + \dots + F_n l_n(\xi)$$

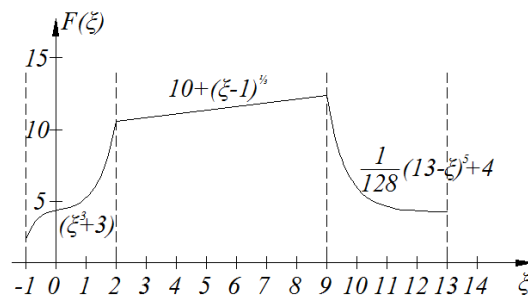
12.1.1.1 Příklad

Najděte interpolační polynom $\psi(\xi)$ pro funkci $F(\xi) = 2^\xi - \xi$ pro případ užití funkčních hodnot v bodech $\xi = 0; 1; 3$. Tedy $\xi_0 = 0, \xi_1 = 1, \xi_2 = 3, F_0 = 1, F_1 = 1, F_2 = 5$.

1. postup – pomocí Vandermondovy matice

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 0 & 0 & a_0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & a_1 & 1 \\ 1 & 3 & 9 & a_2 & 5 \end{array}$$

$$\psi(\xi) = a_0 + a_1\xi + a_2\xi^2$$



Potom $a_0 = 1, a_1 = -\frac{2}{3}, a_2 = \frac{2}{3}$.

$$\psi(\xi) = 1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{2}{3}\xi^2$$

2. postup – pomocí Lagrangeových interpolačních polynomů

$$\begin{aligned} \psi(\xi) &= F_0 l_0 + F_1 l_1 + F_2 l_2 = 1 \frac{\xi - 1}{-1 - 3} + 1 \frac{\xi - 3}{1 - 2} + 5 \frac{\xi - 1}{3 \cdot 2} \\ &= 1 - \frac{2}{3}\xi + \frac{2}{3}\xi^2 \end{aligned}$$

12.1.2 Newton-Cotesovy integrační vztahy

Známe-li interpolační polynom, lze získat přibližnou hodnotu integrálu $\int_a^b F(\xi) d\xi$.

Postup, při kterém jsou body interpolace rozmístěny rovnoměrně:

$$\xi_0 = a, \xi_n = b, h = \frac{b - a}{n}$$

Při použití Lagrangeova postupu získáme vztah:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \sum_{i=0}^n l_i(\xi) \int_a^b f_i(\xi) d\xi + R_n$$

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = (b-a) \sum_{i=0}^n C_i^n f_i + R_n$$

- R_n – zbytkový člen
- C_i^n – koeficienty Newton-Cotesovy numerické integrace pro n bodů

Newton-Cotesovy koeficienty a odhad chyby (tabulka pro $n = 1; 2; \dots 6$):

Počet intervalů	C_0^n	C_1^n	C_2^n	C_3^n	C_4^n	C_5^n	C_6^n
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$					
2	$\frac{1}{6}$	$\frac{4}{6}$	$\frac{1}{6}$				
3	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$			
4	$\frac{7}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{12}{90}$	$\frac{32}{90}$	$\frac{7}{90}$		
5	$\frac{19}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{50}{288}$	$\frac{75}{288}$	$\frac{19}{288}$	
6	$\frac{41}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{272}{840}$	$\frac{27}{840}$	$\frac{216}{840}$	$\frac{41}{840}$

12.1.2.1 Příklad

Určete Newton-Cotesovy konstanty pro případ, že interpolační polynom je řádu 2 ($\psi(\xi)$ je parabola).

$$\int_a^b f(\xi) d\xi \doteq \int_a^b F_0 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_0 - \xi_1} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_0 - \xi_2} + F_1 \frac{\xi - \xi_0}{\xi_1 - \xi_0} \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} + F_2 \frac{\xi - \xi_0}{\xi_2 - \xi_0} \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} d\xi$$

Nechť $\xi_0 = a, \xi_1 = a + h, \xi_2 = a + 2h$

- $h = \frac{b-a}{2}$

Po vyčíslení (pro případ $n = 2$) získáme:

$$\int_a^b f(\xi) d\xi = \frac{b-a}{6} (F_0 + 4F_1 + F_2)$$

12.1.2.2 Příklad

Použijte Simpsonovo pravidlo pro výpočet integrálu $\int_0^3 2^\xi - \xi d\xi$, pro $n = 2, h = \frac{3}{2}$.

$$\xi_0 = 0, \xi_1 = \frac{3}{2}, \xi_2 = 3, F_0 = 1, F_1 = 1,328427125, F_2 = 5$$

$$\int_0^3 2^\xi - \xi d\xi = \frac{3}{6} (1 \cdot 1 + 4 \cdot 1,328427125 + 1 \cdot 5) = 5,656854$$

$$\text{Přesné řešení: } \int_0^3 2^\xi - \xi d\xi = 5,598868$$

$$\text{Chyba řešení: } R = 0,067986$$

$$\text{Horní hranice chyby: } R < \frac{3-0}{1000} \ln 2 \cdot 4 \cdot 2^\xi = 0,448743$$

- 2^ξ – maximum funkce v daném intervalu
- $\xi = 3$

Zvýšení přednosti integrace lze dosáhnout zmenšením intervalů h . Lze si vybrat ze dvou možností, a to použít Newton-Cotesovy vztahy vyššího řádu nebo opakovaně vztahy nižšího řádu.

12.1.2.3 Příklad

Pro výpočet integrálu z předchozího příkladu se má použít poloviční délka kroku h . Potom $h = \frac{3}{4}$ a odpovídající funkční hodnoty jsou $F_0 = 1, F_1 = 0,931792, F_2 = 1,328427, F_3 = 2,506828, F_4 = 5$.

Použijeme-li Newton-Cotesův vztah vyššího řádu, potom se jedná o případ $h = \frac{3}{4}$.

$$\int_0^3 2^\xi - \xi d\xi = \frac{3}{90} (7F_0 + 32F_1 + 12F_2 + 32F_3 + 7F_4) = 5,599232$$

Použijeme-li Simpsonovo pravidlo dvakrát, dostaneme vztah:

$$\int_0^3 2^\xi - \xi \, d\xi = \int_0^{\frac{3}{2}} 2^\xi - \xi \, d\xi + \int_{\frac{3}{2}}^3 2^\xi - \xi \, d\xi$$

- $\int_0^{\frac{3}{2}} 2^\xi - \xi \, d\xi \doteq \frac{\frac{3}{2}-0}{6} F_0 + 4F_1 + F_2 \doteq 1,513899$
- $\int_{\frac{3}{2}}^3 2^\xi - \xi \, d\xi \doteq \frac{3-\frac{3}{2}}{6} F_2 + 4F_3 + F_4 \doteq 4,088935$

$$\int_0^3 2^\xi - \xi \, d\xi = 1,513899 + 4,088935 = 5,602834$$

Využití opakování vztahů nižších řádů je výhodnější než použití Newton-Cotesova vztahu vyšších řádů. Přesnost se zvyšuje se zmenšováním kroku h . Uvedený postup lze aplikovat i na oblasti, kdy funkce $F(\xi)$ obsahuje nespojitosti.

12.1.2.4 Příklad

Použijte Simpsonovo integrační pravidlo pro výpočet integrálu $\int_{-1}^{13} F(\xi) \, d\xi$, kde průběh funkce $F(\xi)$ je uveden na obrázku.

Integrace se musí provést pro tři intervaly:

$$\int_{-1}^{13} F(\xi) \, d\xi = \int_{-1}^2 \xi^3 + 3 \, d\xi + \int_2^9 10 + \xi - 1 \, \frac{1}{3} \, d\xi + \int_9^{13} \frac{1}{128} (13 - \xi)^5 + 4 \, d\xi$$

Pro výpočet každého ze tří integrálů se použije Simpsonovo pravidlo.

- $\int_{-1}^2 \xi^3 + 3 \, d\xi \doteq \frac{2-(-1)}{6} 1 \cdot 2 + 4 \cdot 3,125 + 1 \cdot 11 = 12,75$
- $\int_2^9 10 + \xi - 1 \, \frac{1}{3} \, d\xi \doteq \frac{9-2}{6} 1 \cdot 11 + 4 \cdot 11,650964 + 1 \cdot 12 = 81,204498$
- $\int_9^{13} \frac{1}{128} (13 - \xi)^5 + 4 \, d\xi \doteq \frac{13-9}{6} 1 \cdot 11 + 4 \cdot 4,25 + 1 \cdot 4 = 22$

$$\int_{-1}^{13} F(\xi) \, d\xi = 12,75 + 81,204498 + 22 = 115,954498$$

12.1.3 Gaussova numerická integrace

Výše uvedené metody jsou efektivní, zůstává-li integrální krok konstantní. Avšak při integraci matic v metodě konečných prvků je nutno vyčíslovat funkci F v zadaných bodech. Tyto body se mohou nacházet v libovolném místě na prvku. Proto je přirozené použít postup, ve kterém mohou být integrační body rozmístěny nerovnoměrně. Toto vede ke stanovení polohy integračních bodů tak, aby použitá metoda dávala co nejlepší řešení. Velmi důležitá metoda numerické integrace, ve které jsou současně optimalizovány polohy integračních bodů a váhy v těchto bodech, se nazývá Gaussova kvadratura.

$$\int_a^b F(\xi) d\xi = w_1 F(\xi_1) + w_2 F(\xi_2) + \dots + w_n F(\xi_n) + R_n$$

Základním předpokladem Gaussovy numerické metody je, že v daném výrazu jsou váhy $w_1, w_2, \dots, w_n$ i souřadnice integračních bodů proměnné.

V případě odvození Newton-Cotesových vztahů jsou neznámými pouze váhy, které se určují integrací polynomu $\psi(\xi)$, jehož hodnoty v konstantě vzdálených integračních bodech se rovnají $F(\xi)$.

V případě Gaussovy integrace jsou vyčíslovány také souřadnice integračních bodů. Je tedy nutné vyčíslit $2n$ neznámých hodnot.

Analogicky (jako u odvození Newton-Cotesových vztahů) se použije interpolační polynom ve tvaru:

$$\psi(\xi) = \sum_{j=1}^n F_j l_j(\xi)$$

- n – počet integračních bodů
- $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ – souřadnice integračních bodů (stále neznámé)

Pro získání hodnot $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ se definuje funkce $P(\xi) = (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \dots (\xi - \xi_n)$, která je polynomem n -tého řádu. Je zřejmé, že $P(\xi) = 0$ v integračních bodech.

$$F(\xi) = \psi(\xi) + P(\xi) \beta_0 + \beta_1 \xi + \beta_2 \xi^2 + \dots$$

Integrací funkce $F(\xi)$ získáme:

$$\int_a^b F(\xi) d\xi = \sum_{j=1}^n F_j \int_a^b l_j(\xi) d\xi + \sum_{j=0}^{\infty} \beta_j \int_a^b \xi^j d\xi$$

První integrál v pravé části rovnice je funkcí řádu $n - 1$ a nižší. Druhý integrál je funkcí řádu n a vyšší.

Neznámé hodnoty $\xi_j, j = 1; 2; \dots n$ lze určit z podmínek, protože polynom $\psi \xi$ procházející skrz n bodů, ve kterých $\psi \xi = F \xi$ a polynom $P \xi = 0$:

$$\int_a^b P \xi \xi^k d\xi = 0, \quad k = 0; 1; 2; \dots n-1$$

Výše uvedené podmínky vyjadřují fakt, že integrál $\int_a^b F \xi d\xi$ je aproximován integrálem polynomu řádu $2n-1$ nahrazující $F \xi$.

Newton-Cotesovy vztahy pro $n+1$ rovnoměrně vzdálených integračních bodů integrují přesné polynomy do řádu nejvýše n .

Na druhé straně Gaussova kvadratura, která využívá n nerovnoměrně vzdálených bodů integrace, integruje přesně polynomy do řádu $2n-1$.

Určení bodů integrace a integračních vah je závislé na intervalu od a do b . Výpočet však můžeme realizovat v intervalu od -1 do 1 v přirozených souřadnicích. Body integrace z odpovídající váhy v intervalu od -1 do 1 musí odpovídat bodům a vahám v intervalech od a do b . Platí převodní vztahy:

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i, \quad \frac{b-a}{2} w_i$$

Provádíme-li výpočet v intervalu od -1 do 1 , pak $a = -1, b = 1$.

Souřadnice integračních bodů:

$$w_j = \int_{-1}^1 l_j \xi d\xi, \quad j = 1; 2; \dots n$$

Souřadnice bodů integrace a váhy (interval od -1 do 1 , pro $n = 1; 2; \dots 6$)

n	ξ_i			w_i		
1	0.			2.		
2	$\pm 0,57735$	02691	89626	1,00000	00000	00000
3	$\pm 0,77459$	66692	41483	0,55555	55555	55556
	0,00000	00000	00000	0,88888	88888	88889
4	$\pm 0,86113$	63115	94053	0,34785	48451	37454
	$\pm 0,33998$	10435	84856	0,65214	51548	62546
5	$\pm 0,90617$	98459	38664	0,23692	68850	56189
	$\pm 0,53846$	93101	05683	0,47862	86704	99366
	0,00000	00000	00000	0,56888	88888	88889

6	$\pm 0,93246$	95142	03152	0,17132	44923	79170
	$\pm 0,66120$	93864	66265	0,36076	15730	48139
	$\pm 0,23861$	91860	83197	0,46791	39345	72691

Koeficienty v tabulce lze vyčíslit přímo, avšak pro vyšší n řešení se stává komplikovaným. Lze si pomoci Lagrangeovými polynomy (Gauss-Lagrangeovy koeficienty)

12.1.3.1 Příklad

Vyčíslete polohu integračních bodů a váhy pro případ dvoubodové Gaussovy kvadratury.

$$P \xi = \xi - \xi_1 \quad \xi - \xi_2$$

$$\int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) d\xi = 0$$

$$\int_{-1}^1 (\xi - \xi_1)(\xi - \xi_2) \xi d\xi = 0$$

Po integraci získáme rovnice:

$$\xi_1 \xi_2 = -\frac{1}{3}, \quad \xi_1 + \xi_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \xi_1 = -\frac{1}{3}, \quad \xi_2 = \frac{1}{3}$$

Po dosazení souřadnic do výrazu:

$$w_1 = \int_{-1}^1 \frac{\xi - \xi_2}{\xi_1 - \xi_2} d\xi, \quad w_2 = \int_{-1}^1 \frac{\xi - \xi_1}{\xi_2 - \xi_1} d\xi \quad \Rightarrow \quad w_1 = w_2 = 1$$

12.1.3.2 Příklad

Použijte dvoubodovou Gaussovu integraci pro výpočet integrálu $\int_0^3 2^\xi - \xi d\xi$.

$$\int_0^3 2^\xi - \xi d\xi = w_1 F(\xi_1) + w_2 F(\xi_2)$$

Protože interval je od 1 do 3 je nutné transformovat hodnoty koeficientů z intervalu od -1 do 1 .

$$\frac{b-a}{2} w_i \Leftrightarrow w_1 = \frac{3}{2} \quad 1, \quad w_2 = \frac{3}{2} \quad 1$$

$$\frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} \xi_i \Leftrightarrow \xi_1 = \frac{3}{2} \quad 1 - \frac{1}{3}, \quad w_2 = \frac{3}{2} \quad 1 + \frac{1}{3}$$

Potom $\int_0^3 2\xi - \xi^3 d\xi = 5,56053551$

Gaussova numerická integrace se využívá při výpočtu matic izoparametrických prvků.

12.2 Vícerozměrný případ

12.2.1 Gaussova numerická integrace v případě integrace na prvcích

1D úloha:

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{i=1}^n w_i f(\xi_i)$$

2D úloha:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m w_i w_j f(\xi_i, \eta_j)$$

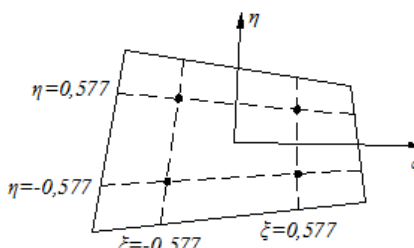
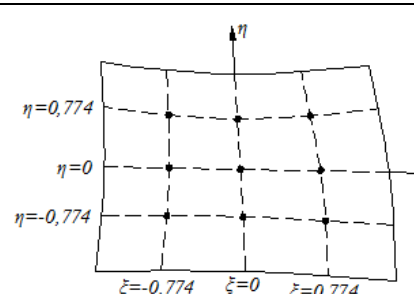
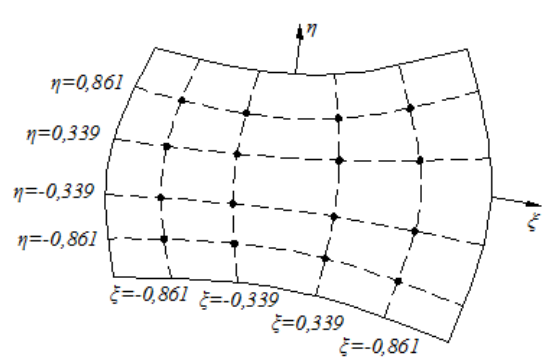
3D úloha:

$$\int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(\xi, \eta, \zeta) d\xi d\eta d\zeta = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m \sum_{k=1}^p w_i w_j w_k f(\xi_i, \eta_j, \zeta_k)$$

Indexy n, m, p ukazují na možnost použít různá integrační schémata ve směrech ξ, η, ζ .

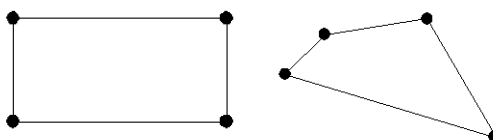
Praktické poznámky:

Při integraci je nutno zvolit řád integrace odpovídající typu konečného prvku. Řád numerické integrace výrazně ovlivňuje přesnost matic prvku a nároky na čas výpočtu matic prvku. Při určitém řádu integrace jsou všechny matice prvků vyčíslovány přesně. V některých případech snížení řádu integrace může vést k lepšímu řešení a výrazně urychlit výpočet. Existuje řada doporučení, jaký řád integrace použít pro daný typ prvku. Hodnoty vyčíslených veličin jsou nejpřesněji vyčísleny v integračních bodech.

Řád integrace	Stupeň přesnosti	Poloha integračních bodů
2x2	3	
3x3	5	
4x4	7	

Optimální řád Gaussovy integrace (rovinné prvky)

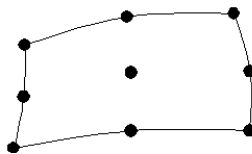
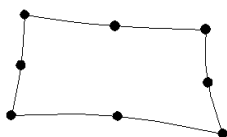
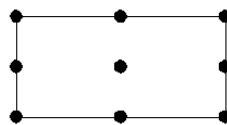
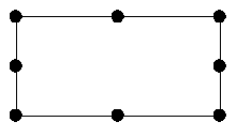
2x2



Středoevropské centrum pro vytváření a
technicko-ekonomických studijních programů
Registrační číslo CZ.1.07/2.2.00/28.0301

Tento projekt je spolufinancován Evropským sociálním fondem a státním rozpočtem České republiky.

3x3

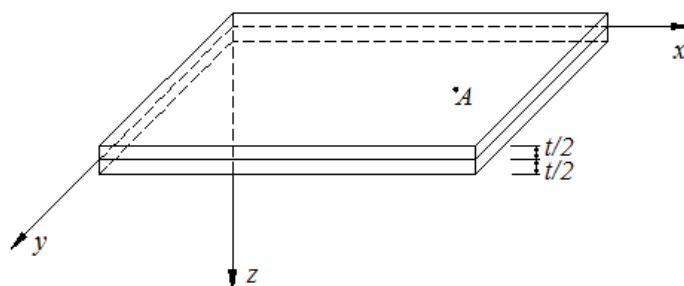


13 Základní přístupy k řešení ohýbaných desek

13.1 Teorie tlustých desek

Úloha ohýbaných desek je obecně úlohou třídídimenzionální, ale za určitých předpokladů ji lze převést na úlohu dvojdimenzionální.

Mějme desku (viz. obr.) v pravoúhlé soustavě souřadnic x, y, z .



Přemístění libovolného bodu A je funkcí tří souřadnic. Toto přemístění lze rozložit do Maclaurinovy řady podle souřadnice z :

$$u_x = u_x(x, y, z) = u_{x0}(x, y, z) + \frac{\partial u_x}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_x}{\partial z^2} z^2 + \dots$$

$$u_y = u_y(x, y, z) = u_{y0}(x, y, z) + \frac{\partial u_y}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_y}{\partial z^2} z^2 + \dots$$

$$u_z = u_z(x, y, z) = u_{z0}(x, y, z) + \frac{\partial u_z}{\partial z} z + \frac{1}{2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial z^2} z^2 + \dots$$

V případě lineární teorie pružnosti ponecháme jen první dva členy v rovnicích pro u_x a u_y a první člen v rovnici pro u_z na základě předpokladu, že deformace $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ a $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ jsou malé v porovnání s tloušťkou desky. $\frac{\partial u_z}{\partial z} = \varepsilon_{zz} = 0$.

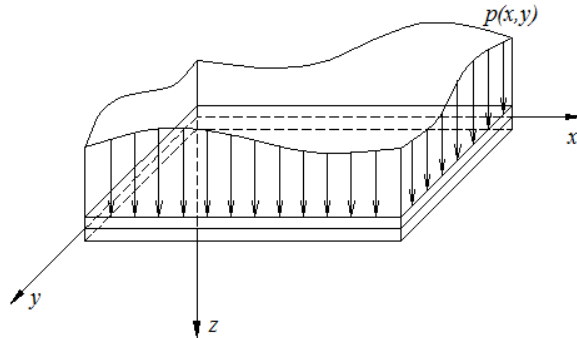
$$u_x = u_x(x, y, z) = u_{x0}(x, y, z) + \frac{\partial u_x}{\partial z} z$$

$$u_y = u_y(x, y, z) = u_{y0}(x, y, z) + \frac{\partial u_y}{\partial z} z$$

$$u_z = u_z(x, y, z) = u_{z0}(x, y, z)$$

Zavedeme-li předpoklad o nedeformovatelnosti střednicové plochy v rovině x, y , potom $u_{x0} \ x, y, z = u_{y0} \ x, y, z = 0$.

$$u_x = u_x \ x, y, z = \frac{\partial u_x}{\partial z} z$$



$$u_y = u_y \ x, y, z = \frac{\partial u_y}{\partial z} z$$

$$u_z = u_z \ x, y, z = u_{z0} \ x, y, z$$

Parciální derivace $\frac{\partial u_x}{\partial z}$ a $\frac{\partial u_y}{\partial z}$ jsou závislé pouze na x, y .

Ze závislosti mezi posunutími a deformacemi vyplývá:

$$\varepsilon_{yz} = \frac{\partial u_y}{\partial z} + \frac{\partial u_z}{\partial y} \Rightarrow \frac{\partial u_y}{\partial z} = \varepsilon_{yz} - \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

$$\varepsilon_{zx} = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \frac{\partial u_x}{\partial z} \Rightarrow \frac{\partial u_x}{\partial z} = \varepsilon_{zx} - \frac{\partial u_z}{\partial x}$$

Podle Hookova zákona platí:

$$\sigma_{yz} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{yz} \Rightarrow \varepsilon_{yz} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{E}{2(1+\nu)} \varepsilon_{zx} \Rightarrow \varepsilon_{zx} = \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx}$$

V případě předpokladu o rovnoměrnosti rozdělení napětí σ_{yz} a σ_{zx} platí:

$$\sigma_{yz} = \frac{T_y}{A} = \frac{T_y}{bt} = \frac{t_y}{t}$$

$$\sigma_{zx} = \frac{T_x}{A} = \frac{T_x}{bt} = \frac{t_x}{t}$$

- T_x, T_y – příčné síly
- t – tloušťka průřezu
- A – plocha
- b – šířka průřezu: $b = 1$

Výše uvedený předpoklad je dolní odhad.

V konkrétní aplikaci je nutno upravující koeficient zohledňující smykové napětí $k \in 1; 1,5$:

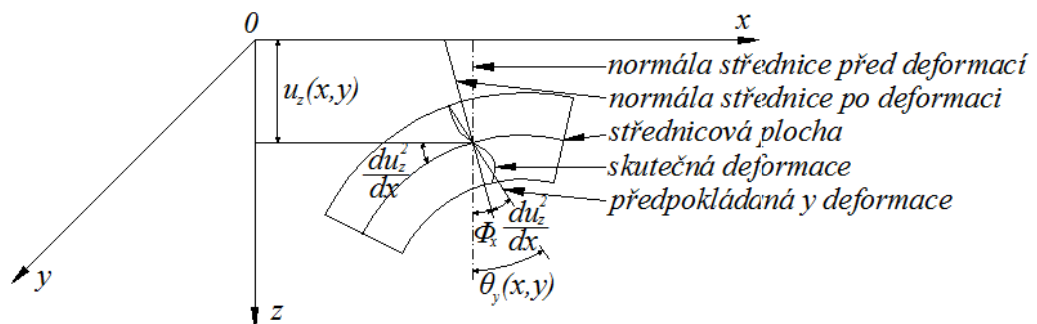
- $\sigma_{yz} = k \frac{t_y}{t}$
- $\sigma_{zx} = k \frac{t_x}{t}$

Posunutí u_x , u_y a u_z ve směrech x , y , z v libovolném bodě desky:

$$\begin{aligned}
 u_x(x, y, z) &= u_x(x, y, z) = z \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{zx} - \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 u_y(x, y, z) &= u_y(x, y, z) = z \frac{2(1+\nu)}{E} \sigma_{yz} - \frac{\partial u_z}{\partial y} \\
 u_z(x, y, z) &= u_z(x, y, 0) = u_z(x, y) - z \frac{\partial u_z}{\partial x} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_x \\
 &= u_z(x, y) - z \frac{\partial u_z}{\partial y} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_y
 \end{aligned}$$

- $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_x$
- $\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_y$
 - Tyto funkce jsou funkcemi pouze dvou souřadnic x a y .
 - Hodnoty θ_x a θ_y jsou průměrná pootočení v libovolném bodě střednice desky (poloha střednice před deformací).

Z obrázku je patrné, že přímky, které jsou totožné s normálami ke střednicové ploše v počátečním (nedeformovaném) stavu, zůstávají po deformaci přímé, ale již se s těmito normálami neztotožňují.



Rovnice pro průměrná pootočení lze přepsat pomocí modulu pružnosti ve smyku G :

- $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} - k \frac{t_x}{Gt}$
- $\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - k \frac{t_y}{Gt}$

Dále je zřejmé, že výrazy pro průměrné pootočení se skládají z pootočení normál a doplňujících pootočení vlivem příčného tahu. Úplné pootočení:

- v části $x = konst.$: $\theta_y \ x, y = \frac{\partial u_z}{\partial x} + \phi_x$
- v části $y = konst.$: $\theta_x \ x, y = \frac{\partial u_z}{\partial y} + \phi_y$
- **Vztahy mezi deformacemi a posunutími:**

13.1.1 Vztahy mezi deformacemi a posunutími

$$\begin{array}{l}
 \varepsilon_{xx} \\
 \varepsilon_{yy} \\
 \varepsilon_{zz} \\
 \varepsilon_{xy} \\
 \varepsilon_{xz} \\
 \varepsilon_{yz}
 \end{array}
 = \Gamma
 \begin{array}{l}
 u_x \\
 u_y \\
 u_z \\
 u_x \\
 u_y \\
 u_z
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \\
 -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \\
 0 \\
 -2 \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \\
 -\frac{\partial u_z}{\partial x} - \phi_x + \frac{\partial u_z}{\partial x} \\
 -\frac{\partial u_z}{\partial y} - \phi_y + \frac{\partial u_z}{\partial x}
 \end{array}
 =
 \begin{array}{l}
 z\kappa_x \\
 z\kappa_y \\
 0 \\
 z\kappa_{xy} \\
 -\phi_x \\
 -\phi_y
 \end{array}$$

- Γ – lineární operátor
- $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ – křivosti v jednotlivých směrech
 - $\kappa_x = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} - \frac{\partial \phi_x}{\partial x}$
 - $\kappa_y = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} - \frac{\partial \phi_y}{\partial y}$
 - $\kappa_{xy} = -2\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial \phi_x}{\partial y} - \frac{\partial \phi_y}{\partial x}$

13.1.2 Vztahy pro výpočet napětí

$$\begin{array}{l}
 \sigma_{xx} \\
 \sigma_{yy} \\
 \sigma_{xy}
 \end{array}
 = \frac{EZ}{1-\nu^2}
 \begin{array}{ccc}
 1 & \nu & 0 \\
 \nu & 1 & 0 \\
 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \kappa_x \\
 \kappa_y \\
 \kappa_{xy}
 \end{array}$$

Efekt normálového napětí σ_{zz} je v odvození zanedbán.

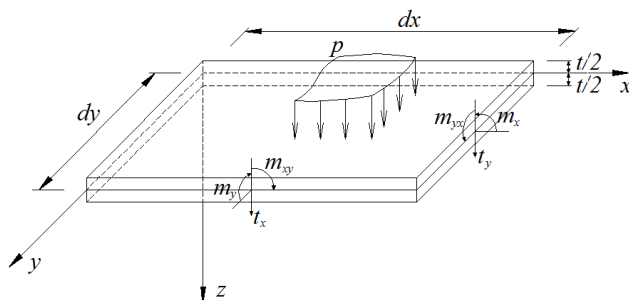
Smyková napětí σ_{xz} a σ_{yz} lze určit z podmínek rovnováhy napětí:

- $\frac{\partial \sigma_{xz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{xx}}{\partial x} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial y} - x$
- $\frac{\partial \sigma_{yz}}{\partial z} = -\frac{\partial \sigma_{yy}}{\partial y} - \frac{\partial \sigma_{xy}}{\partial x} - y$

Po integraci vzhledem k z v případě, že objemové síly nepůsobí:

- $$\begin{matrix} \sigma_{xz} \\ \sigma_{yz} \end{matrix} = \frac{3}{2t} \begin{matrix} 1 - \frac{4z^2}{t^2} \\ 1 - \frac{4z^2}{t^2} \end{matrix} \begin{matrix} t_x \\ t_y \end{matrix}$$

13.1.3 Měrné vnitřní síly (intenzity vnitřních sil) – vnitřní síly na jednotku délky



$$\begin{matrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \\ t_x \\ t_y \end{matrix} = \begin{matrix} D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & D & 2 & 1 - \nu \\ 0 & 0 & 0 & \alpha S & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha S \end{matrix}$$

- D – desková tuhost: $D = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)}$
- $S = Gt$
- $\alpha = K^{-1}$

Pro případ spojitého zatížení působícího kolmo k povrchu desky a s využitím rovnice rovnováhy:

$$\frac{\partial t_x}{\partial x} + \frac{\partial t_y}{\partial y} + p = 0$$

- p – spojitě zatížení

$$\begin{matrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{matrix} = \begin{matrix} -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{t^2 \partial t_x}{G \partial x} - \frac{\nu t^2}{G(1-\nu)} p \\ -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \frac{t^2 \partial t_y}{G \partial y} - \frac{\nu t^2}{G(1-\nu)} p \\ -D(1-\nu) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} + \frac{t^2}{12} \left(\frac{\partial t_x}{\partial y} + \frac{\partial t_y}{\partial x} \right) \end{matrix}$$

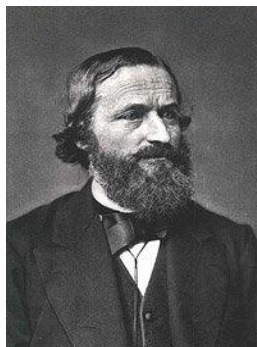
Výše uvedené rovnice odpovídají Reissnerově teorii. Rozdíl je v tom, že normálové napětí σ_{zz} je zanedbáno. Zanedbáme-li smykové deformace, je možno jednoduchým způsobem přejít k teorii ohýbaných tenkých desek, tzv. Kirchhoffově teorii.



Marie-Sophie Germain

(1776–1831)

francouzský matematik, fyzik a filosof



Gustav Robert Kirchhoff

(1824–1887)

německý fyzik,
zakladatel spektrální analýzy

13.2 Teorie tenkých desek – klasická Kirchhoffova teorie

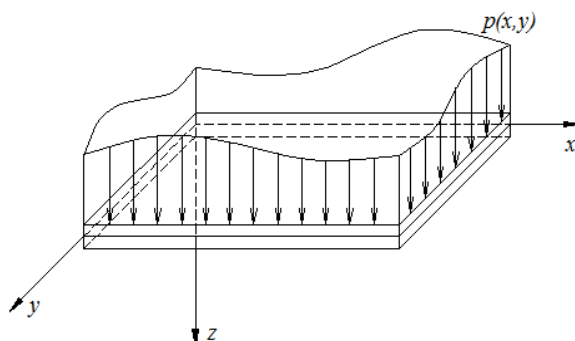
Tenkými nazýváme desky, pro jejichž poměr tloušťek k nejmenšímu charakteristickému rozměru v půdorysu platí nerovnost $\frac{1}{5} \geq \frac{t}{b} \geq \frac{1}{80}$ a velikost předpokládaných průhybů není větší než $\frac{1}{4}t$. Uvedené předpoklady vycházejí z praktického přístupu k řešení, a proto nemusí být pravidlem.

$$\varepsilon_{yz} = 0, \varepsilon_{zx} = 0$$

$$\frac{\partial u_x}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_y}{\partial z} = -\frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Tyto vztahy integrujeme podle z :

- $u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x} + f_1(x, y)$
- $u_y = -z \frac{\partial u_z}{\partial y} + f_2(x, y)$



Abychom určili konstanty f_1 a f_2 , použijeme hypotézu o neroztažitelnosti střednicové plochy:

- $u_{x0} = 0 + f_1 \quad x, y = 0$
- $u_{y0} = 0 + f_2 \quad x, y = 0$

$$u_x = -z \frac{\partial u_z}{\partial x}, u_y = -z \frac{\partial u_z}{\partial y}$$

Podle předpokladu $\varepsilon_{zz} = \frac{\partial u_z}{\partial z} = 0$ a analogicky s přihlédnutím ke vztahům $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x}$ a $\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}$:

$$\begin{aligned} u_x(x, y, z) &= -z\theta_y(x, y) \\ u_y(x, y, z) &= -z\theta_x(x, y) \\ u_z(x, y, z) &= u_z(x, y) \end{aligned}$$

13.2.1 Vztahy mezi deformacemi a posunutími

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= \frac{\partial}{\partial x} u_x(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_y(x, y, z) = -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= \frac{\partial}{\partial y} u_x(x, y, z) = -2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned} = z \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

- $\kappa_x, \kappa_y, \kappa_{xy}$ – křivosti v jednotlivých směrech
 - $\kappa_x = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}$
 - $\kappa_y = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}$
 - $\kappa_{xy} = -\frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}$

13.2.2 Vztahy pro výpočet napětí

$$\begin{pmatrix} m_x \\ m_y \\ m_{xy} \end{pmatrix} = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ 2\kappa_{xy} \end{pmatrix}$$

$$m_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right) \quad \text{Nm/m}$$

$$m_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z dz = -D \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right) \quad \text{Nm/m}$$

$$m_{xy} = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z dz = -D \left(1 - \nu \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \quad \text{Nm/m}$$

Z podmínek rovnováhy elementu dx, dy (momentové k x, y)

$$t_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} dz = -D \left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial x^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial x \partial y^2} \right) \quad \text{N/m}$$

$$t_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yz} dz = -D \left(\frac{\partial^3 u_z}{\partial y^3} + \frac{\partial^3 u_z}{\partial y \partial x^2} \right) \quad \text{N/m}$$

13.2.3 Základní diferenciální rovnice desky

Získáme ji připojením podmínky silové rovnováhy do směru z .

$$\Delta \Delta u_z = \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 u_z}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 u_z}{\partial y^4} = \frac{p}{D}$$

- $\Delta \Delta$ – operátor: $\Delta \Delta = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4}{\partial y^4}$
- p – spojitě zatížení
- D – ohybová tuhost desky

V případě řešení kmitání desek, přibude v diferenciální rovnici podle 2. Newtonova ohybového zákona člen: $\rho t \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$.

- ρ – hustota materiálu
- $\frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2}$ – zrychlení ve směru osy z

$$D \Delta \Delta u_z + \rho t \frac{\partial^2 u_z}{\partial t^2} = p$$

Potenciální energie soustavy (desky):

Plošné zatížení desky $p(x, y)$

$$\begin{aligned} \pi = U - L = & \int_S -p u_z \\ & + \frac{D}{2} \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \right)^2 + 2\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} + \left(\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \right)^2 \\ & + 2 \left(1 - \nu \right) \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \, dx dy \end{aligned}$$

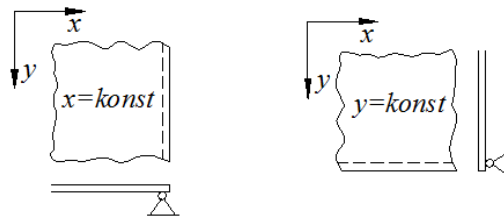
13.2.4 Základní okrajové podmínky

13.2.4.1 Prostý podepření okraj

$$\text{Pro okraj } x = \text{konst.} \Rightarrow u_z = \frac{\partial u_z}{\partial y} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \frac{\partial^i u_z}{\partial y^i} = 0$$

$$\text{Pro okraj } y = \text{konst.} \Rightarrow u_z = \frac{\partial u_z}{\partial x} = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \frac{\partial^i u_z}{\partial x^i} = 0$$

- i – libovolné kladné číslo



Kinematické (geometrické okrajové podmínky:

$$x = \text{konst.} \Rightarrow u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$$

$$y = \text{konst.} \Rightarrow u_z = 0, \quad \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$$

Je-li současně $\frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$ a $\frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$, potom $m_x = m_y = 0$

Silové okrajové podmínky:

$$x = \text{konst.} \Rightarrow m_x = m_y = 0, m_{xy} \neq 0, t_r \neq 0$$

$$y = \text{konst.} \Rightarrow m_x = m_y = 0, m_{xy} \neq 0, t_r \neq 0$$

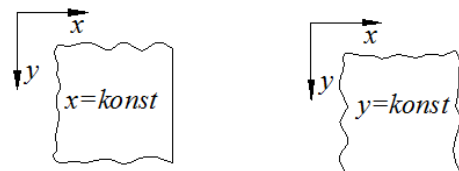
13.2.4.2 Volný okraj

Doplňené posouvající síly:

Náhrady za kroutící moment a posouvající sílu.

$$t_x = t_x + \frac{\partial m_{xy}}{\partial y}$$

$$t_y = t_y + \frac{\partial m_{xy}}{\partial x}$$

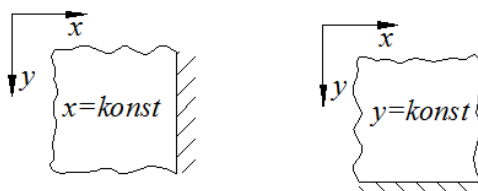


Obdobně lze postupovat i u prostého podepření.

13.2.4.3 Vetknutý okraj

V teorii tenkých desek platí:

$$\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} = 0, \theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} = 0$$



Silové podmínky:

$$x = \text{konst.} \Rightarrow u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = 0$$

$$y = \text{konst.} \Rightarrow u_z = \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = 0$$

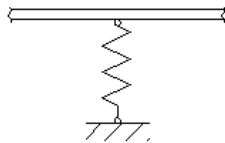
$$x = \text{konst.} \Rightarrow m_x = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2}, m_y = -D\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} = \nu m_x$$

$$y = \text{konst.} \Rightarrow m_y = -D \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2}, m_x = -D\nu \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} = \nu m_y$$

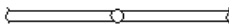
V případě okrajových podmínek u desek, které mají jiný tvar než obdélníkový, je nutno určovat pootočení a vnitřní síly v šikmém řezu. Potom se výrazy pro tyto okrajové podmínky vyjadřují komplikovaně. Podrobnosti lze nalézt v literatuře, např.: SERVÍT, R. a kol. Teorie pružnosti a plasticity II.

13.2.1 Speciální okrajové podmínky

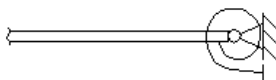
- pružné podepření



- liniový kloub



- pružné vetknutí



- desky plošně podepřené

13.3 Hlavní momenty

Při dimenzování speciálně železo-betonových desek je nutno určit tzv. hlavní momenty m_I a m_{II} ($m_{xy} = 0$).

$$m_{I,II} = \frac{1}{2} (m_x + m_y) \pm \sqrt{m_x^2 - m_y^2 + 4m_{xy}^2}$$

Polohy normál k hlavním rovinám:

$$\operatorname{tg} \varphi_I = \frac{m_I - m_x}{m_{xy}} = \frac{m_{xy}}{m_I - m_y}$$

Extrémní hodnoty krouticího momentu – v řezech půlicích úhel hlavních rovin:

$$m_{xy}^{extr} = \pm \frac{1}{2} m_I - m_{II}$$

13.4 Přesnější modely desek

Ortotropie – případ ortogonální anizotropie – různé moduly pružnosti ve dvou kolmých směrech.

$E_x, E_y, \nu_{xy}, \nu_{yx}$ – 4 nezávislé konstanty

Desková ohybová tuhost:

$$D_x = \frac{E_x t^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$$

$$D_y = \frac{E_y t^3}{12(1 - \nu_{xy} \nu_{yx})}$$

Desková torzní tuhost:

$$D_{xy} = \frac{G t^3}{12}$$

13.5 Metody řešení desek

- analytické řešení
 - dvojími nekonečnými řadami
 - jednoduchými nekonečnými řadami
- přibližné řešení
 - kolokační metoda
 - metoda minima čtverců chyb
 - metoda konečných diferencí
 - variační metody

13.6 Matice tuhosti ohýbaných desek

13.6.1 Tenké desky

Stav deformace v úloze ohybu tenké desky je funkcí příčného posunutí u_z x, y střednicové plochy desky.

$$\begin{aligned} \varepsilon_{xx} &= -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \varepsilon_{yy} &= -z \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \\ \varepsilon_{xy} &= 2z \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y} \end{aligned}, \text{ kde } u_z = u_z(x, y)$$

Na základě uzlových parametrů provedeme na každém prvku lokální aproximaci spojitými funkcemi, které jsou určeny jediným způsobem na základě hodnot uzlových parametrů. V případě tenkých desek jsou uzlové parametry lineárně závislé $u_z, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}, \frac{\partial^2 u_z}{\partial x \partial y}, \dots$.

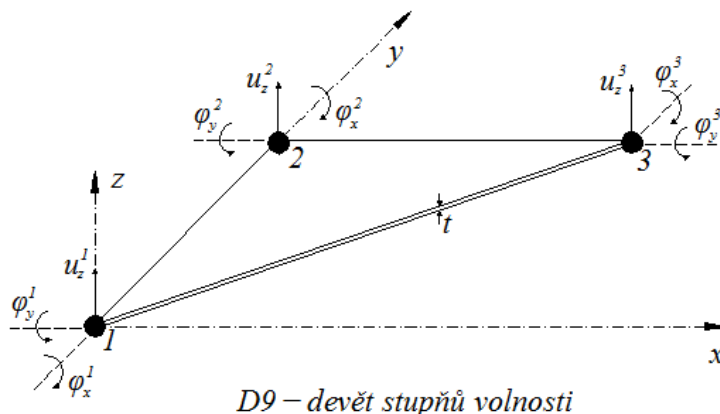
Pro konkrétní aplikaci ve variační deskové úloze je nutno zajistit spojitost v průhybech u_z a ve sklonech normál $\frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}$ ke střednicové ploše desky.

Prvky, které zajistí spojitost $u_z, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}$, jsou nazývány kompatibilními neboli konformními.

Prvky, které nesplní požadavky spojitosti $u_z, \frac{\partial u_z}{\partial x}, \frac{\partial u_z}{\partial y}$, nazýváme nekompatibilními neboli nekonformními.

13.6.1.1 Trojúhelníkový konečný prvek – teorie tenkých desek

V případě teorie tenkých desek je příčné posunutí u_z nezávislé na posunutích u_x, u_y (posunutí ve střednicové rovině). Potom matice tuhosti odpovídající posunům ve střednicové rovině a matice tuhosti odpovídající příčnému posunutí jsou nezávislé a mohou být vyčíslovány zvlášť.



Matice tuhosti pro posunutí ve střednicové rovině je vlastně funkce tuhosti 2D úlohy rovinné napjatosti. Při odvozování matice tuhosti vycházíme z předpokladu, že funkci u_z vyjádříme pomocí konstant $a_0, a_1, \dots, a_8$:

$$u_z = a_0 + a_1x + a_2y + a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2 + a_6x^3 + a_7xy^2 + x^2y + a_8y^3$$

$$\varphi_y = \frac{du_z}{dy} = a_2 + a_4x + 2a_5y + a_7(2xy + x^2) + 3a_8y^2$$

$$\varphi_x = \frac{du_z}{dx} = a_1 + 2a_3x + a_4y + 3a_6x^2 + a_7y^2 + 2xy$$

Zapsáno maticově:

$$\mathbf{u}^e = \begin{bmatrix} u_z^1 \\ \varphi_y^1 \\ \varphi_x^1 \\ u_z^2 \\ \varphi_y^2 \\ \varphi_x^2 \\ u_z^3 \\ \varphi_y^3 \\ \varphi_x^3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & y_2 & 0 & 0 & y_2^2 & 0 & 0 & y_2^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 2y_2 & 0 & 0 & 3y_2^2 \\ 0 & -1 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 & 0 & -y_2^2 & 0 \\ 1 & x_3 & y_3 & x_3^2 & x_3y_3 & y_3^2 & x_3^3 & x_3y_3^2 + x_3^2y_3 & y_3^3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & x_3 & 2y_3 & 0 & 2x_3y_3 + x_3^2 & 3y_3^2 \\ 0 & -1 & 0 & -2x_3 & -y_3 & 0 & -3x_3^2 & -y_3^2 + 2x_3y_3 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \\ a_5 \\ a_6 \\ a_7 \\ a_8 \end{bmatrix}$$

$$= \mathbf{S} \mathbf{a}$$

Pozn.: Funkci u_z nelze použít pro případ $2y_3 = -x_3 + y_2$, protože v tomto případě je matice $\mathbf{S}$ singulární.

Funkce průhybu:

$$u_z = \mathbf{P} \mathbf{a}$$

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbf{P} &= \begin{bmatrix} 1 & x & y & x^2 & xy & y^2 & x^3 & xy^2 + x^2y & y^3 \end{bmatrix} \\ \bullet \quad \mathbf{a} &= \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & a_6 & a_7 & a_8 \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e \Rightarrow u_z = \mathbf{P} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e$$

Existují i jiné možnosti výběru náhradního polynomu. Např.: Gallagher použil člen $a_7 xy^2$.

Poměrné deformace pro dosazení do funkcionálu energie deformace prvku desky:

- $\varepsilon_{xx} = -Z \frac{\partial u_z}{\partial x^2}$
- $\varepsilon_{yy} = -Z \frac{\partial u_z}{\partial y^2}$
- $\varepsilon_{xy} = -2Z \frac{\partial u_z}{\partial x \partial y}$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 6x & 2y & 0 \\ \varepsilon_{yy} & -Z & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2x & 6y \\ \varepsilon_{zz} & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 4x+y & 0 \end{pmatrix} \mathbf{a} = -Z \mathbf{G} \mathbf{a} = \mathbf{H} \mathbf{a}$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \mathbf{H} \mathbf{a} = \mathbf{H} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e = \mathbf{B} \mathbf{u} = -Z \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e$$

Matice pružnostních konstant:

$$\mathbf{D} = \frac{E}{1-\nu^2} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Matice pružnostních konstant pro případ desky:

$$\mathbf{D}^* = \frac{Eh^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{pmatrix}$$

Potenciální energie deformace prvku:

$$U^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \int_{-t/2}^{t/2} \boldsymbol{\varepsilon}^T \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon} t \, dx dy dz = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{G}^T \frac{t^3}{12} \mathbf{D} \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} \mathbf{u}^e \, dx dy$$

$$= \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{G}^T \mathbf{D}^* \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} \, dx dy \mathbf{u}^e = \frac{1}{2} \int_{\Omega^e} \mathbf{u}^{eT} \mathbf{K}^e \mathbf{u}^e$$

- $\int_{-t/2}^{t/2} z^2 dz = \frac{t^3}{12}$

Matice tuhosti prvku:

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{G}^T \mathbf{D}^* \mathbf{G} \mathbf{S}^{-1} \, dx dy = \int_{\Omega^e} \mathbf{S}^{-T} \mathbf{G}^T \mathbf{D}^* \mathbf{G} \, dx dy \mathbf{S}^{-1}$$

$$\mathbf{G}^T \mathbf{D}^* \mathbf{G} \, dx dy = \frac{Et^3}{12(1-\nu^2)} \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2(1-\nu) & 0 & 4 & 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 0 & 4\nu & 0 & 4 & 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 2(1-\nu) & 0 & 4 & 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 0 & 4 & 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 4 & 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 12\nu x & 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 36x^2 & 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ 12-8\nu & x+y^2 & -8(1-\nu)xy \\ -8(1-\nu)xy & 36y^2 \end{pmatrix} dx dy$$

Vyčíslení jednotlivých koeficientů lze provést pomocí plošných integrálů:

$$I x^0, y^0 = \iint dxdy = \frac{1}{2} x_3 y_2$$

$$I x^1, y^0 = \iint x dxdy = \frac{1}{6} x_3^2 y_2$$

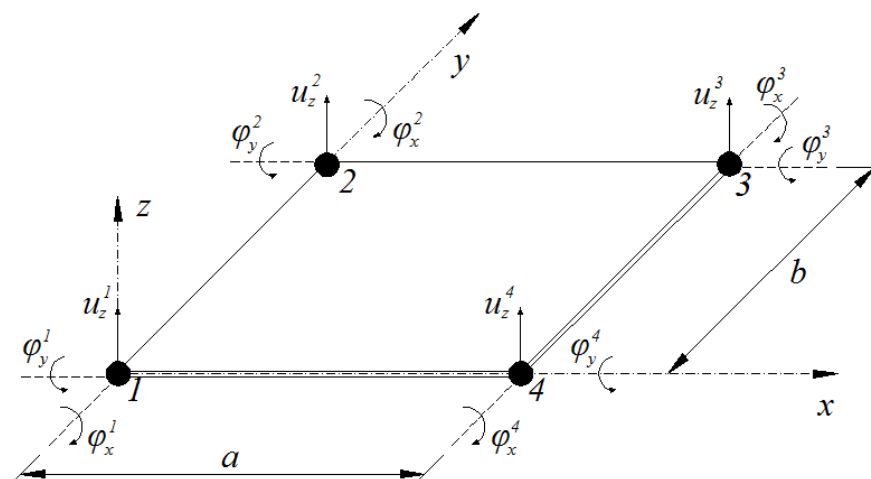
$$I x^2, y^0 = \iint x^2 dxdy = \frac{1}{12} x_3^3 y_2$$

$$I x^0, y^1 = \iint y dxdy = \frac{1}{6} x_3 y_2 (y_2 + y_3)$$

$$I x^0, y^2 = \iint y^2 dxdy = \frac{1}{12} x_3 y_2 (y_2^2 + y_2 y_3 + y_3^2)$$

$$I x^1, y^1 = \iint xy dxdy = \frac{1}{24} x_3^2 y_2 (y_2 + 2y_3)$$

13.6.1.2 Obdélníkový konečný prvek – teorie tenkých desek



D12 – dvanáct stupňů volnosti

Funkce posunutí pro výpočet matice tuhostí může být dána ve tvaru:

$$u_z = \mathbf{V} \mathbf{u}^e$$

$$\bullet \quad \mathbf{u}^e = u_z^1 \quad \varphi_y^1 \quad \varphi_x^1 \quad u_z^2 \quad \varphi_y^2 \quad \varphi_x^2 \quad u_z^3 \quad \varphi_y^3 \quad \varphi_x^3 \quad u_z^4 \quad \varphi_y^4 \quad \varphi_x^4 \quad^T$$

- V – vektor tvarových funkcí:

$$V^T = \begin{pmatrix} 1 - \xi\eta - 3 - 2\xi \xi^2 1 - \eta - 1 - \xi 3 - 2\eta \eta^2 \\ 1 - \xi \eta 1 - \eta^2 b \\ -\xi 1 - \xi^2 1 - \eta a \\ 1 - \xi 3 - 2\eta \eta^2 + \xi 1 - \xi 1 - 2\xi \eta \\ -1 - \xi 1 - \eta \eta^2 b \\ -\xi 1 - \xi^2 \eta a \\ 3 - 2\xi \xi^2 \eta - \xi \eta 1 - \eta 1 - 2\eta \\ -\xi 1 - \eta \eta^2 b \\ 1 - \xi^2 \eta a \\ 3 - 2\xi \xi^2 1 - \eta + \xi \eta 1 - \eta 1 - 2\eta \\ \xi \eta 1 - \eta^2 b \\ 1 - \xi \xi^2 1 - \eta a \end{pmatrix}$$

$$\varepsilon = Bu^e$$

- ε – dosadí se do výrazu pro potenciální energii, dále nepostupuje obvyklým způsobem

$$B^T = \begin{pmatrix} 1 - 2\xi 1 - \eta \frac{6z}{a^2} & 1 - \xi 1 - 2\eta \frac{6z}{b^2} & 1 - 6\xi 1 - \xi - 6\eta 1 - \eta \frac{2z}{ab} \\ 0 & 1 - \xi 2 - 3\eta \frac{2z}{b} & 1 - 4\eta + 3\eta^2 \frac{2z}{a} \\ -2 - 3\xi 1 - \eta \frac{2z}{a} & 0 & -1 - 4\xi + 3\xi^2 \frac{2z}{b} \\ 1 - 2\xi \eta \frac{6z}{a^2} & -1 - \xi 1 - 2\eta \frac{6z}{b^2} & -1 + 6\xi 1 - \xi + 6\eta 1 - \eta \frac{2z}{ab} \\ 0 & 1 - \xi 2 - 3\eta \frac{2z}{b} & -\eta 2 - 3\eta \frac{2z}{a} \\ -2 - 3\xi \eta \frac{2z}{a} & 0 & 1 - 4\xi + 3\xi^2 \frac{2z}{b} \\ -1 - 2\xi \eta \frac{6z}{a^2} & -\xi 1 - 2\eta \frac{6z}{b^2} & 1 - 6\xi 1 - \xi - 6\eta 1 - \eta \frac{2z}{ab} \\ 0 & \xi 1 - 3\eta \frac{2z}{b} & \eta 2 - 3\eta \frac{2z}{a} \\ -1 - 3\xi \eta \frac{2z}{a} & 0 & -\xi 2 - 3\xi \frac{2z}{b} \\ -1 - 2\xi 1 - \eta \frac{6z}{a^2} & \xi 1 - 2\eta \frac{6z}{b^2} & -1 + 6\xi 1 - \xi + 6\eta 1 - \eta \frac{2z}{ab} \\ 0 & \xi 2 - 3\eta \frac{2z}{b} & -1 - 4\eta + 3\eta^2 \frac{2z}{a} \\ -1 - 3\xi 1 - \eta \frac{2z}{a} & 0 & \xi 2 - 3\xi \frac{2z}{b} \end{pmatrix}$$

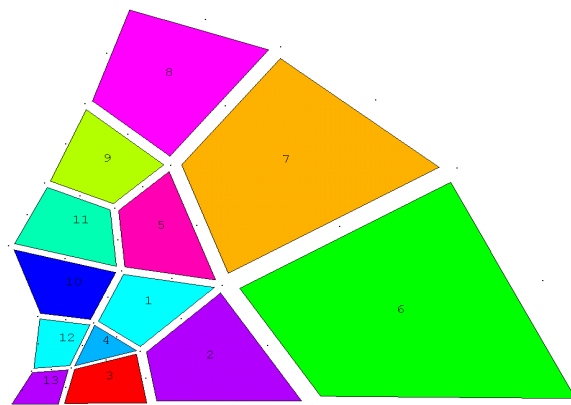
Aproximovaná funkce průhybu zajišťuje pouze spojitost posunutí na hranici mezi prvky (prvky jsou vzhledem k posunutím kompatibilní). Avšak z hlediska spojitosti sklonů normál na hranici mluvíme o tomto prvku jako o nekompatibilním, protože prvek spojitost pootočení normál na hranici mezi prvky nezaručuje. Aby bylo dosaženo jak kompatibility v posunutích a pootočeních normál, byly stanoveny aproximační funkce ve tvaru dvojdimenzionálních Hermitových polynomů (Bogner).

$$V^T = \begin{pmatrix} 1-2\xi & 1-\xi^2 & 1+2\eta & 1-\eta^2 \\ 1+2\xi & 1-\xi^2\eta & 1-\eta^2b \\ -\xi & 1-\xi^2 & 1+2\eta & 1-\eta^2a \\ 1+2\xi & 1-\xi^2 & 3-2\eta & \eta^2 \\ -1+2\xi & 1-\xi^2 & 1-\eta & \eta^2b \\ -\xi & 1-\xi^2 & 3-2\eta & \eta^2a \\ 3-2\xi & \xi^2 & 3-2\eta & \eta^2 \\ -3-2\xi & \xi^2 & 3-2\eta & \eta^2b \\ 1-\xi & \xi^2 & 3-2\eta & \eta^2a \\ 3-2\xi & \xi^2 & 1+2\eta & 1-\eta^2 \\ 3-2\xi & \xi^2\eta & 1-\eta^2b \\ 1-\xi & \xi^2 & 1+2\eta & 1-\eta^2a \end{pmatrix}$$

Existuje celá řada kompatibilních a nekompatibilních prvků pro řešení ohybu tenkých desek. Některé postupy odvození jsou známé, některé utajené.

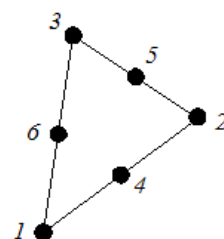
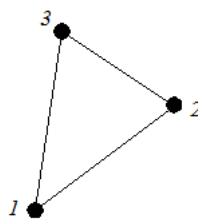
Řešení pomocí deskových prvků získáme uzlové hodnoty průhybu, pootočení a napětí, poměrné deformace na prvcích. Pro dimenzování železo-betonových desek je nutno znát dimenzační momenty získané z m_x, m_y, m_{xy} . Hodnoty momentů lze získat z hodnot napětí $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_{xy}$ v dolních (index d) a horních (index h) vláknech desky.

$$m_x = \frac{t^2}{12} \frac{\sigma_x^h - \sigma_x^d}{}, \quad m_y = \frac{t^2}{12} \frac{\sigma_y^h - \sigma_y^d}{}, \quad m_{xy} = \frac{t^2}{12} \frac{\sigma_{xy}^h - \sigma_{xy}^d}{}$$



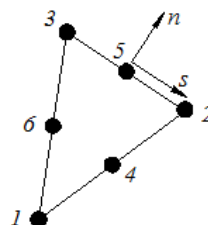
13.6.1.3 Kompatibilní konečné prvky pro řešení ohybu tenkých desek

$$u_i = \frac{u_z}{\frac{\partial u_z}{\partial x}}, \quad i = 1; 2; 3$$

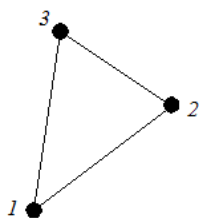


$$u_i = \frac{u_z}{\frac{\partial u_z}{\partial x}}, u_j = u_z, \quad i = 1; 2; 3, \quad j = 4; 5; 6$$

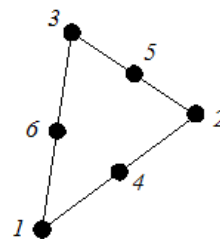
$$u_i = \frac{u_z}{\frac{\partial u_z}{\partial x}}, u_j = \frac{u_z}{\frac{\partial u_z}{\partial n}}, \quad i = 1; 2; 3, \quad j =$$



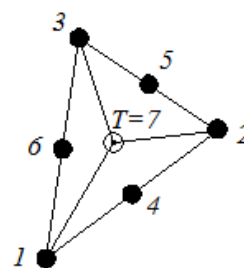
4; 5; 6



$$u_i = \frac{u_z}{\frac{\partial u_z}{\partial x}}, \quad i = 1; 2; 3$$

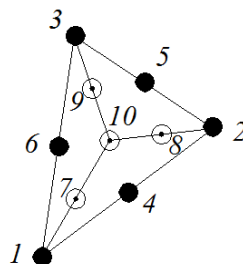


$$u_i = \begin{matrix} u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial xy} \\ \frac{\partial^2 u_z}{\partial y^2} \end{matrix}, u_j = u_z, \quad i = 1; 2; 3, \quad j = 4; 5; 6$$



⊙ parametry v tomto uzlu jsou vyloučeny stat. kondenzací

$$u_i = \begin{matrix} u_z \\ \frac{\partial u_z}{\partial x} \\ \frac{\partial u_z}{\partial y} \end{matrix}, u_j = \frac{\partial u_z}{\partial n}, \quad i = 1; 2; 3; 7, \quad j = 4; 5; 6$$



⊙ parametry v těchto uzlech jsou vyloučeny stat. kondenzací

13.6.1.4 Statická kondenzace

Statická kondenzace vnitřních parametrů je vhodná v případě vytváření super-prvků (subkonstrukcí), kdy je skupina prvků redukována (převedena) na jeden prvek, nebo při vytváření matic prvku, kdy lze některé parametry převážně ve vnitřních uzlech prvku vyloučit.

Nejprve si ukážeme, že kvadratickou funkci pozitivně definitní maticí, tj. funkci $G = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F}$, můžeme minimalizovat tak, že najdeme minimum vzhledem k některým proměnným a pak ji budeme minimalizovat vzhledem ke zbývajícím proměnným.

Nechť $\mathbf{u} = u_1^m \ u_2^m \ \dots \ u_i^m \ u_1^s \ u_2^s \ \dots \ u_i^s{}^T$. Označme $\mathbf{u}_m = u_1^m \ u_2^m \ \dots \ u_i^m{}^T$ a $\mathbf{u}_s = u_1^s \ u_2^s \ \dots \ u_i^s{}^T$

Matici $\mathbf{K}$ rozdělme na čtyři submatice a vektor $\mathbf{F}$ na dva vektory způsobem odpovídajícím vektoru $\mathbf{u}$.

$$\mathbf{K} = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{C} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{bmatrix} \mathbf{F}_m \\ \mathbf{F}_s \end{bmatrix}$$

- $\mathbf{A}$ – matice typu (i, i)
- $\mathbf{B}$ – matice typu (i, j)
- $\mathbf{C}$ – matice typu (j, j)
- $\mathbf{F}_m$ – skládá se z prvních i složek vektoru $\mathbf{F}$
- $\mathbf{F}_s$ – obsahuje zbylé složky vektoru $\mathbf{F}$

Potom platí: $G = \frac{1}{2} \mathbf{u}^T \mathbf{K} \mathbf{u} - \mathbf{u}^T \mathbf{F} = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \mathbf{A} \mathbf{u}_m + 2 \mathbf{u}_m^T \mathbf{B} \mathbf{u}_s + \mathbf{u}_s^T \mathbf{C} \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_m^T \mathbf{F}_m - \mathbf{u}_s^T \mathbf{F}_s$. Pravá strana je kvadratickou funkcí proměnných $\mathbf{u}_s$, přičemž kvadratická část je rovna $\frac{1}{2} \mathbf{u}_s^T \mathbf{C} \mathbf{u}_s$. Vzhledem k tomu, že matice $\mathbf{K}$ je pozitivně definitní, musí být pozitivně definitní i matice $\mathbf{C}$. Proto má funkce G , jako funkce proměnných $u_1^s, u_2^s, \dots, u_j^s$, právě jedno minimum, které dostaneme výpočtem z rovnice: $\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_s} = 0$

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{u}_s} = \mathbf{B}^T \mathbf{u}_m + \mathbf{C} \mathbf{u}_s - \mathbf{F}_s \Rightarrow \mathbf{u}_s = -\mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{u}_m + \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_s$$

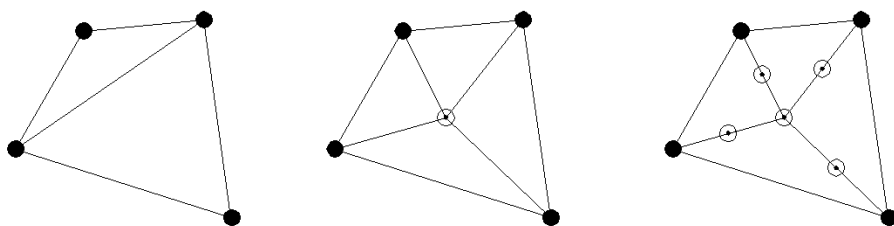
Po dosazení a úpravě obdržíme výraz $G = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m^T \mathbf{F}^* - \frac{1}{2} \mathbf{F}_s^T \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_s$

- $\mathbf{K}^* = \mathbf{A} - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{B}^T$
- $\mathbf{F}^* = \mathbf{F}_m - \mathbf{B} \mathbf{C}^{-1} \mathbf{F}_s$

Vzhledem k tomu, že cílem není najít minimum funkce G , nýbrž vektor který ji minimalizuje, lze člen na pravé straně vztahu zanedbat, což znamená, že zbývá minimalizovat funkci $G = \frac{1}{2} \mathbf{u}_m^T \mathbf{K}^* \mathbf{u}_m - \mathbf{u}_m^T \mathbf{F}^*$. Výpočet matice $\mathbf{K}^*$ a vektoru $\mathbf{F}^*$ neprovádíme podle výše uvedených vztahů, ale Gaussovou eliminací proměnných $u_1^s, u_2^s, \dots, u_j^s$, přičemž obdržíme soustavu rovnic $\mathbf{K}^* \mathbf{u}_m = \mathbf{F}^*$.

- $\mathbf{K}^*$ – matice tuhosti (koeficientů) superprvků
- $\mathbf{F}^*$ – zatěžovací vektor

13.6.1.5 Kompatibilní čtyřúhelníkové konečné prvky



13.6.2 Konečné prvky pro řešení ohybu tlustých desek

Timošenko poprvé poukázal na důležitost příčných smykových deformací a rotačních sil setrvačnosti. Později byla Kirchhoffova teorie desek doplněna zahrnutím příčného smykového efektu Donnellem a Goldveizerem. Nejpoužívanějšími teoriemi ohybu tlustých desek jsou Reissnerova a Mindlinova. Posunutí v desce mohou být plně popsána komponentami vektoru u_z .

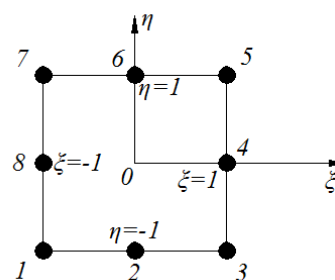
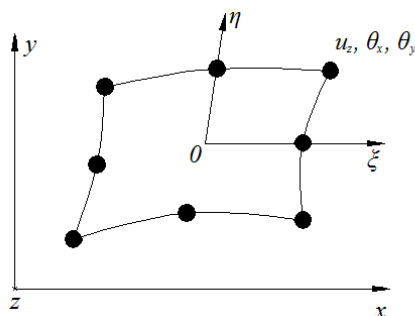
$$u_z = \begin{pmatrix} -z\theta_y \\ -z\theta_x \\ u_z(x, y) \end{pmatrix}$$

- u_z – příčné posunutí střednicové plochy
- θ_y – pootočení vůči ose y : $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_x$
- θ_x – pootočení vůči ose x : $\theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y} - k \frac{2(1+\nu)}{Et} t_y$

Tyto komponenty jsou nezávislými funkcemi souřadnic bodů střednicové plochy desky x, y , čímž se liší od klasické teorie tenkých desek $\theta_y = \frac{\partial u_z}{\partial x}, \theta_x = \frac{\partial u_z}{\partial y}$.

13.6.2.1 Izoparametrický konečný prvek o 24 stupních volnosti

Tento prvek byl poprvé odvozen Hintonem a Rockem a byl publikován v roce 1976. Byl odvozen na základě izoparametrického čtyřúhelníkového prvku o osmi uzlech.



Tvarové funkce závislé na poloze každého z uzlů definujeme:

- geometrií prvků ve tvarech uzlových souřadnic
- proměnným posunutím na prvku ve tvaru uzlových posunutí

$$\text{Platí: } x = \sum_{i=1}^8 \psi_i x_i, \quad y = \sum_{i=1}^8 \psi_i y_i$$

$$\text{Nebo kompaktněji: } \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \psi_i \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$$

- $\mathbf{x}_i = \begin{pmatrix} x_i \\ y_i \end{pmatrix}$

$$\text{Obdobně platí: } u_z = \sum_{i=1}^8 \psi_i u_i, \quad \theta_x = \sum_{i=1}^8 \psi_i \theta_{xi}, \quad \theta_y = \sum_{i=1}^8 \psi_i \theta_{yi}$$

Nebo kompaktněji:
$$\begin{pmatrix} u_x \\ \theta_x \\ \theta_y \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^8 \psi_i \mathbf{u}_i$$

- $$\mathbf{u}_i = \begin{pmatrix} u_i \\ \theta_{xi} \\ \theta_{yi} \end{pmatrix}$$

Opět definujeme transformační matici (Jakobián transformace):
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

- $$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} x_i$$
- $$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} x_i$$
- $$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} y_i$$
- $$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \sum_{i=1}^8 \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} y_i$$

Vztahy mezi deformacemi a posunutími:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \theta_x}{\partial x} \\ -\frac{\partial \theta_y}{\partial y} \\ -\frac{\partial \theta_x}{\partial y} + \frac{\partial \theta_y}{\partial x} \\ -\phi_x \\ -\phi_y \end{pmatrix}$$

Vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ vyjádříme pomocí uzlových parametrů:
$$\boldsymbol{\varepsilon} = \sum_{i=1}^8 \mathbf{B}_i \mathbf{u}_i$$

- $$\mathbf{B}_i = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\partial \psi_i}{\partial x} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} \\ 0 & -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} & -\frac{\partial \psi_i}{\partial x} \\ -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} & -\psi_i & 0 \\ -\frac{\partial \psi_i}{\partial y} & 0 & -\psi_i \end{pmatrix}$$

Derivace tvarových funkcí vyčíslíme podle pravidla derivování složené funkce:

- $$\frac{\partial \psi_i}{\partial x} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial x}$$
- $$\frac{\partial \psi_i}{\partial y} = \frac{\partial \psi_i}{\partial \xi} \frac{\partial \xi}{\partial y} + \frac{\partial \psi_i}{\partial \eta} \frac{\partial \eta}{\partial y}$$
- $$\frac{\partial \xi}{\partial x} a + d - \text{vyčísleny z matice } \mathbf{J}^{-1}$$

Vztahy mezi napětím a deformací:

$$\boldsymbol{\sigma} = \mathbf{D} \boldsymbol{\varepsilon}$$

$$\begin{matrix} \sigma_{xx} \\ \sigma_{yy} \\ \sigma_{xy} \end{matrix} = \frac{Ez}{1-\nu^2} \begin{matrix} 1 & \nu & 0 \\ \nu & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1-\nu}{2} \end{matrix} \begin{matrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \sigma_{zx} \\ \sigma_{yz} \end{matrix} = \frac{3}{2t} \begin{matrix} 1 - \frac{4z^2}{t^2} \\ t_x \\ t_y \end{matrix}, \quad \mathbf{D} = \begin{matrix} & D & \nu D & 0 & 0 & 0 \\ & \nu D & D & 0 & 0 & 0 \\ & 0 & 0 & D & 2 & 1-\nu \\ & 0 & 0 & 0 & \alpha S & 0 \\ & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha S \end{matrix}$$

- $\alpha = 1$
- $S = Gt$

$$\boldsymbol{\sigma}^T \equiv \begin{matrix} m_x & m_y & m_{xy} & t_x & t_y \end{matrix}$$

Matice tuhosti prvku:

$$\mathbf{K}^e = \begin{matrix} & 1 & 1 \\ & -1 & -1 \end{matrix} \mathbf{B}^T \mathbf{D} \mathbf{B} \det \mathbf{J} d\xi d\eta$$

- $\mathbf{B}$ – rozšířená matice sestavená z $\mathbf{B}_i$

Výpočet se provádí pomocí numerické integrace. Nejlepší výsledky při řešení statických úloh jsou získány při použití způsobu tzv. „redukované integrace“. Toto přiblížení využívá 2x2 Gaussovo kvadrurní pravidlo.

Stejným způsobem lze odvodit izoparametrický deskový prvek o 4 uzlech a 12 stupních volnosti. Tento prvek má oproti prvku o 24 stupních volnosti podstatnou výhodu. Nemá mezilehlé uzly, což přináší výhody při dělení oblasti.

14 Skořepiny

Skořepinami se rozumí nosné plošné konstrukce staveb, zakřivené nebo zalomené v jednom popřípadě v obou směrech. Základní charakteristikou skořepiny (tak, jako u desek) je, že jeden její rozměr – tloušťka je výrazně menší než zbývající rozměry.

Skořepiny dělíme do tří skupin, a to podle jejich statického chování, které předurčuje použití výchozí teorie. Je vhodné zavést pojem střední tloušťka skořepiny t_{arr} a střední poloměr křivosti střednicové plochy r_{arr} .

- Velmi tenké skořepiny – kovové zásobníky, velkorozměrové nádrže z oceli, venkovní kovová potrubí velkých průřezů, vysoké kovové komíny,...

$$\circ \quad \frac{t_{arr}}{r_{arr}} = \frac{1}{400} \div \frac{1}{600}$$

- Tenké skořepiny – železobetonové skořepiny, železobetonové pláště chladicích věží, vysoké železobetonové komíny, velkorozměrové železobetonové nádrže, venkovní železobetonové velkopřůměrová potrubí,...

$$\circ \quad \frac{t_{arr}}{r_{arr}} = \frac{1}{50} \div \frac{1}{200}$$

- Thusté skořepiny – nádrže železobetonových vodojemů, tlakové železobetonové potrubí, klenbové železobetonové přehradní nádrže, opěrné zdi vyklenuté proti zemině,

$$\circ \quad \frac{t_{arr}}{r_{arr}} = \frac{1}{20} \div \frac{1}{30}$$

Základem teorie skořepin je teorie tenkých skořepin, a to z těchto důvodů:

- Vyšetřování velmi tenkých skořepin je vždy velmi specifické, závislé na geometrickém tvaru skořepiny, vychází z teorie tenkých skořepin
- Vyšetřování tlustých skořepin je složitější než vyšetřování tenkých skořepin, proto se obchází různými jednoduššími teoriemi

Při navrhování skořepin usilujeme o to, aby hlavní část zatížení spojitě působila v kolmých směrech na střednicovou plochu. Podaří-li se to, potom skořepina přenáší vnější zatížení do podpor především normálovými silami a je málo namáhaná ohybově. Toto se daří zejména u nízkých střešních bání, které se chovají jako prostorový oblouk.

Všeobecná teorie staticky namáhaných tenkých skořepin je vypracována ve třech variantách seřazených podle úrovně modelování a tedy i podle obtížnosti.

- Přesná ohybová teorie
- Technická ohybová teorie
- Membránová teorie

Nejjednodušší teorie je membránová, kterou lze použít jen vzácně, a to u skořepin s převládajícími stěnovými vnitřními silami. Vyšetřujeme-li statické stavy navržené konkrétní tenké skořepiny za použití přesné ohybové teorie nebo technické ohybové teorie, potom je nutno tuto všeobecnou teorii konkretizovat podle tvaru střednicové plochy a podle způsobu podepření. Je to vždy velmi nesnadná a mnohdy neřešitelná úloha. Teoretické vyšetřování tenkých skořepin je matematicky velmi náročné.

Stejně jako u stěn a desek je klíčem ke stanovení jejich statických stavů stěnová a desková rovnice. Obě tyto rovnice jsou sestavovány z příslušných podmínek statických, geometrických a fyzikálních. Obdobně v případě tenkých skořepin jsou tři simultánní parciální diferenciální rovnice 3. a 4. řádu pro složky přemístění střednicové plochy u_x, u_y a u_z . Také tyto rovnice se sestavují z podmínek, statických, geometrických a fyzikálních. Přitom geometrické podmínky se u tenkých skořepin odvozují velmi nesnadno, přičemž se mění s funkcí geometrie střednicové plochy.

14.1 Tenké stavební skořepiny

Střednicová plocha

- zcela hladká (spojitost v bodě včetně první derivace)
- po částech hladká

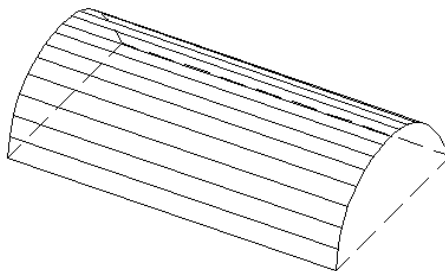
Skořepiny

- s jednou křivostí
- s dvojí křivostí

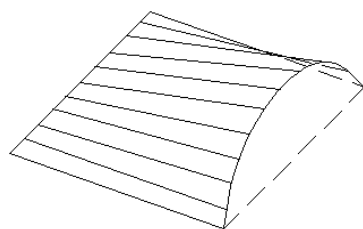
Významnou skupinu tvoří rotační skořepiny, které mohou mít jednu nebo dvojí křivost. Další skupinu tvoří tzv. lomenice s nulovou křivostí, neboť jsou sestaveny ze stěnodesek.

Příklady používaných tenkých skořepin:

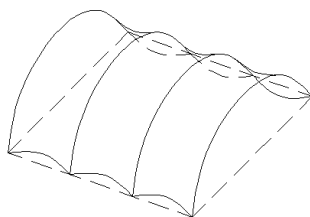
Dlouhá střešní válcová skořepina – jedna křivost



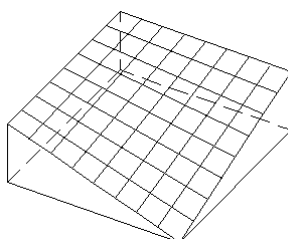
Střešní konoidická skořepina – dvojí křivost



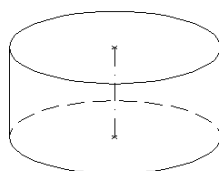
Prefabrikovaný díl střešní skořepiny do rozponu 25 m – hyperbolický paraboloid – dvojí křivost



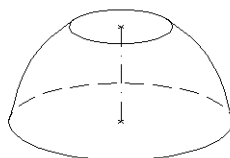
Střešní hyperbolicko-parabolická skořepina – dvojí křivost



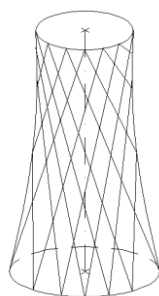
Rotační válcová skořepina – jedna křivost



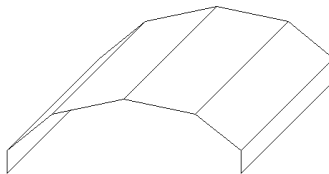
Rotační báně – dvojí křivost



Jednodílný hyperboloid – dvojí křivost



Lomená skořepina – lomenice – nulová křivost



Křivky nejběžnějších hladkých ploch:

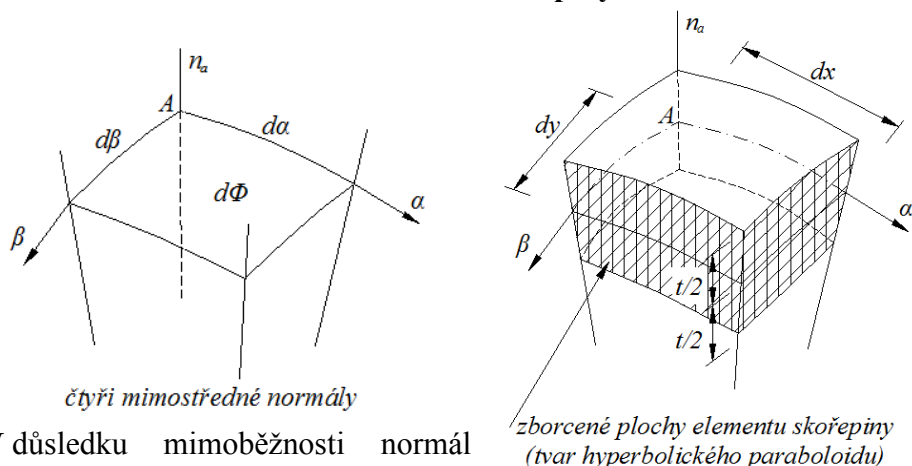
- Válcové plochy
- Rotační kuželová plocha
- Kulová plocha
- Plocha jednodílného rotačního hyperboloidu
- Plocha konoidu

14.2 Přesná ohybová teorie pro vyšetřování plných tenkých skořepin:

Výchozí předpoklady:

- Materiál skořepiny je homogenní, izotropní a lineárně pružný.
- Normálové napětí ve směrech kolmých na střednicovou plochu je ve srovnání s normálovým napětím ve zbývajících směrech natolik malé, že jej považujeme za nulové.
- Předpokládá se platnost rozšířené Navierovy-Bernoulliho hypotézy: Normály střednicové plochy zůstávají normálami i po jejím přetvoření, přičemž vzdálenosti bodů na normálách od střednicové plochy se nemění.
- Předpokládají se natolik malá přetvoření skořepiny, že lze vycházet z teorie I. Řádu.

Geometrie diferenciálního elementu skořepiny:



V důsledku mimoběžnosti normál sou boční plošky diferenciálu elementu vinné. Jedině z takových elementů lze sestavit v obecných směrech $\alpha \perp \beta$ kompatibilně uvažovanou skořepinu. V případě, že ortogonální souřadnice α, β jsou hlavními křivkami plochy Φ , platí $\alpha, \beta = \alpha_I, \alpha_{II}$. Potom normály v rozích diferenciálního elementu $d\Phi = dx dy$ se provádí po párech $\alpha_I = x, \alpha_{II} = y$.

Při konečných poloměrech křivosti r_x, r_y závisí délky dx, dy u diferenciálního elementu skořepiny na vzdálenosti od střednicové plochy Φ , tedy na souřadnicích. Potom platí:

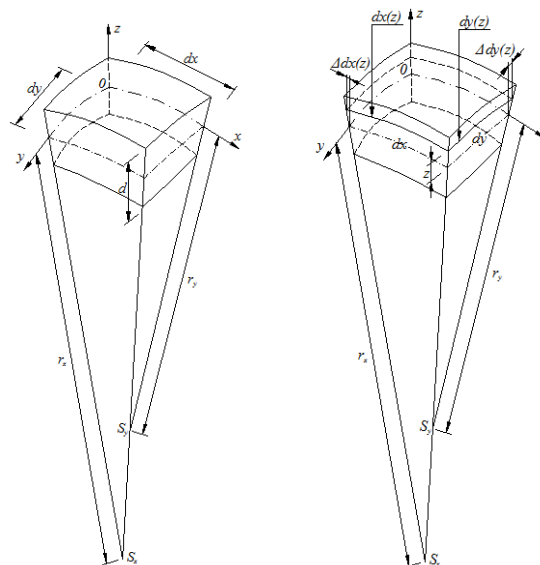
$$dx_z = dx + \Delta dx_z, \quad dy_z = dy + \Delta dy_z$$

Z geometrie elementu plyne:

$$\Delta dx_z = \frac{dx}{r_x} z, \quad \Delta dy_z = \frac{dy}{r_y} z$$

Po dosazení:

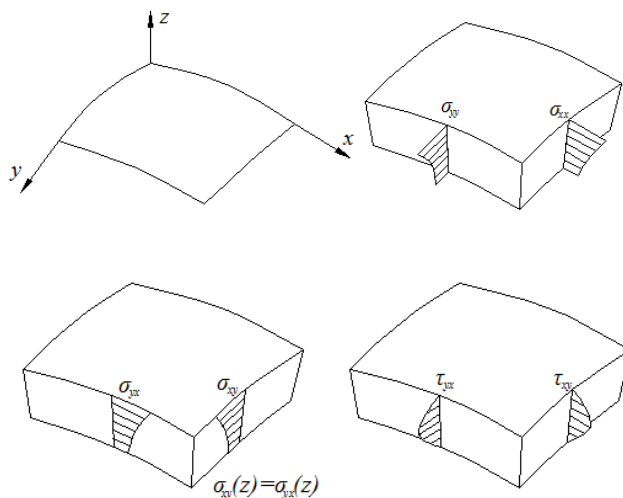
$$dx_z = dx \left(1 + \frac{z}{r_x} \right), \quad dy_z = dy \left(1 + \frac{z}{r_y} \right)$$



Zatížení skořepin:

Na skořepinu by neměly působit koncentrované statické účinky. Silová zatížení obecného směru rozkládáme ve střednicové rovině do směrů x, y, z .

Rozdělení napětí na elementárním prvku skořepiny:



Vnitřní síly skořepiny:

Integrací normálového napětí σ_{xx}, σ_{yy} získáme normálové síly n_x, n_y . Přemístěním n_x, n_y do Φ získáme ohybové momenty m_x, m_y .

$$n_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N/m, \quad n_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad N/m$$

$$m_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xx} z \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N, \quad m_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yy} z \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad N$$

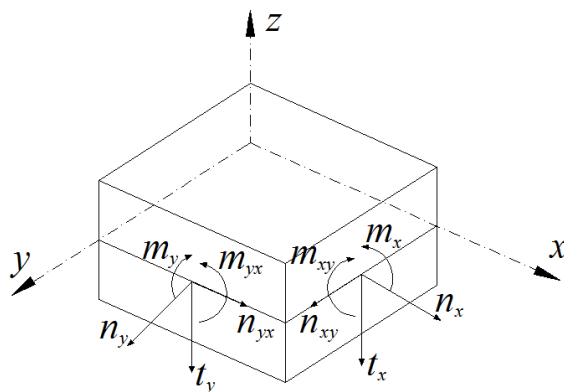
Integrací smykového napětí σ_{xy}, σ_{yx} získáme tangenciální síly n_{xy}, n_{yx} . Jejich přemístěním do Φ získáme krouťící momenty m_{xy}, m_{yx} . Protože $r_x \neq r_y$, pak $n_{xy} \neq n_{yx}$ a $m_{xy} \neq m_{yx}$.

$$n_x = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N/m, \quad n_y = \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad N/m$$

$$m_{xy} = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xy} z \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad N, \quad m_{yx} = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{yx} z \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N$$

Integrací smykového napětí σ_{xz}, σ_{zx} získáme posouvající síly t_x, t_y .

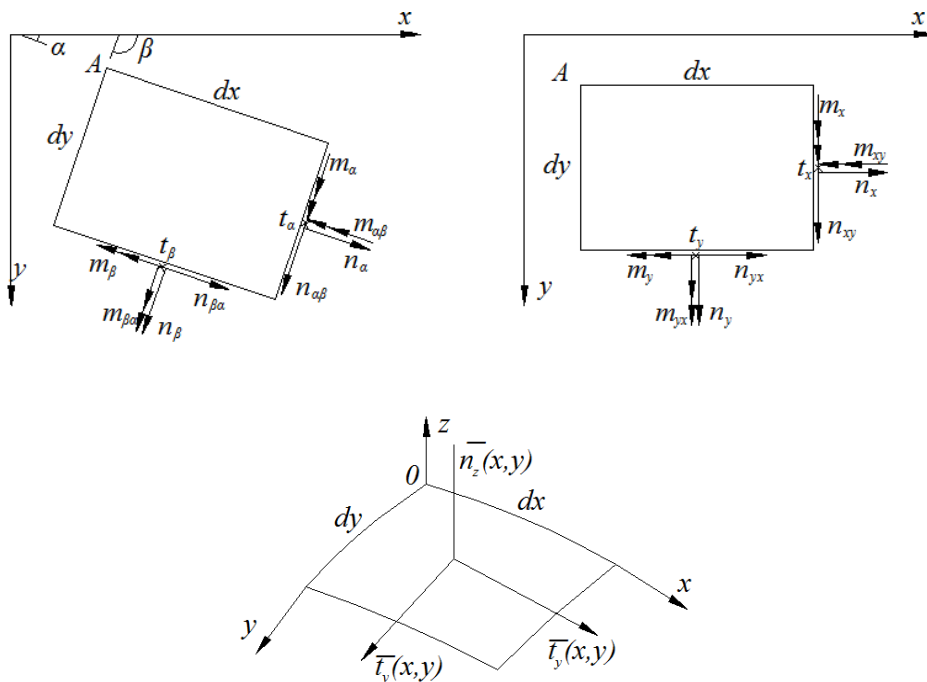
$$t_x = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{xz} \left(1 + \frac{z}{r_y}\right) dz \quad N/m, \quad t_y = - \int_{-t/2}^{t/2} \sigma_{zx} \left(1 + \frac{z}{r_x}\right) dz \quad N/m$$



Napjatost skořepiny v jejím obecném bodě je popsána 10 vnitřními silami:

- Stěnové síly – n_x, n_y, n_{xy}, n_{yx}
- Deskové síly – $m_x, m_y, m_{xy}, m_{yx}, t_x, t_y$

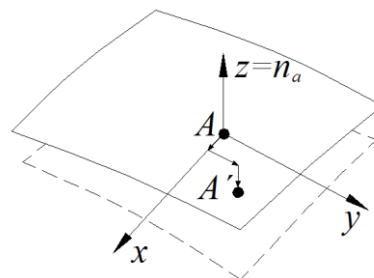
Transformace napjatosti v obecném bodě skořepiny:



$$\begin{aligned}
 n_\alpha &= n_x \cos^2 \alpha + n_y \sin^2 \alpha + n_{xy} + n_{yx} \sin \alpha \cos \alpha \\
 n_\beta &= \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 \vdots & \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \\
 m_{\beta\alpha} &= -m_{xy} \sin^2 \alpha + m_{yx} \cos^2 \alpha - m_x - m_y \sin \alpha \cos \alpha \\
 t_\alpha &= t_x \cos \alpha + t_y \sin \alpha \\
 t_\beta &= -t_x \sin \alpha + t_y \cos \alpha
 \end{aligned}$$

Přemístění skořepiny:

Je popsáno funkcemi u_x, u_y, u_z .



Základní rovnice plných tenkých skořepin:

$$\mathcal{D}_1^3 u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y) = -D_1 t_x(x, y)$$

$$\mathcal{D}_2^3 u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y) = -D_2 t_y(x, y)$$

$$\mathcal{D}_3^3 u_x(x, y), u_y(x, y), u_z(x, y) = +D_3 n_z(x, y)$$

- složité parciální diferenciální rovnice + okrajové podmínky

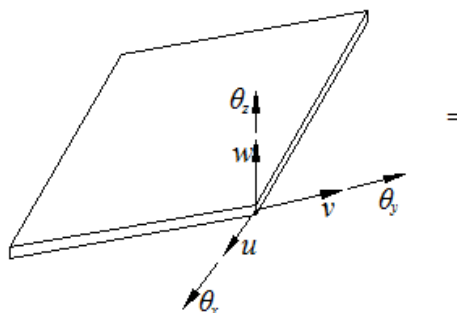
Technická ohybová teorie skořepin:

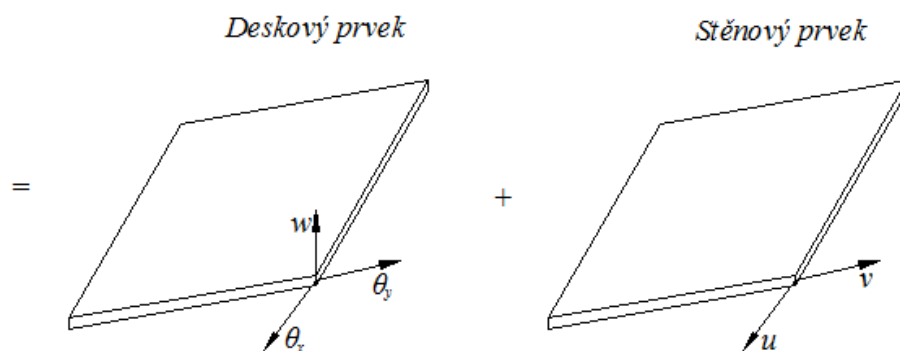
- $t_r \approx 0$ – geometrický předpoklad $\Rightarrow n_{xy} = n_{yx}$ a $m_{xy} = m_{yx}$
- $\nu \approx 0$ – fyzikální předpoklad
-

14.3 Skořepinový plochý čtyřuzlový konečný prvek

Plochý čtyřúhelníkový skořicový prvek lze získat superpozicí ohybového chování desky a rovinné napjatosti ve stěně. Nechť je ohybové chování zahrnuto čtyřúhelníkovým prvkem (4 uzly, 12 stupňů volnosti) a stěnové chování čtyřúhelníkovým prvkem (č. uzly, 8 stupňů volnosti). Potom bude mít výsledný prvek 5 stupňů volnosti v každém uzlu. Stěnové chování se skořepin nazývá membránovým.

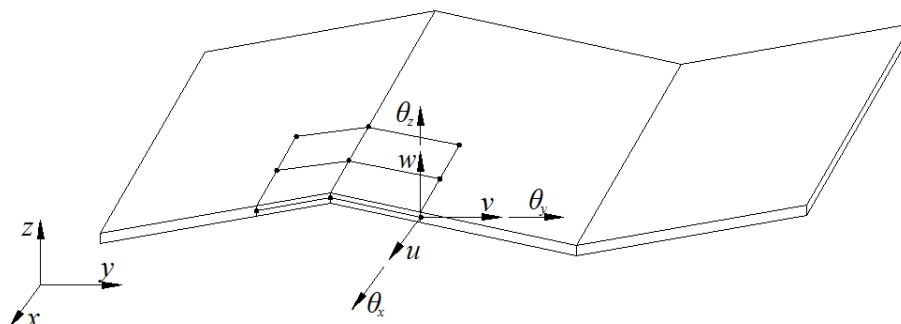
Deskostěnový konečný prvek s pěti stupni volnosti v každém uzlu:



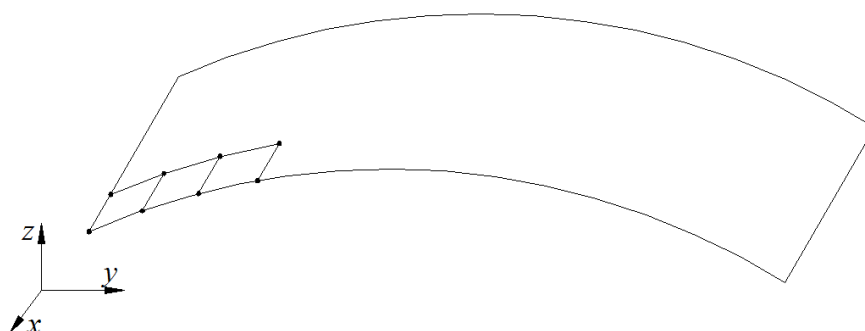


Prvek lze použít jak pro modelování konstrukcí sestávajících z rovinných útvarů propojených pod různými úhly, tak i pro modelování zakřivených útvarů (skořepin).

Lomenice:



Málo zakřivená (plochá skořepina):



Pro praktické použití existují efektivnější typy skořepinových prvků. Na tomto prvku však lze ukázat určité základní postupy a nedostatky při použití obdobných prvků.

Nechť K_B a K_M jsou matice tuhosti v lokální soustavě souřadnic odpovídající ohybovému a membránovému chování prvku. Potom matice tuhosti skořepinového prvku K_S je sestavena takto:

$$K_S = \begin{bmatrix} K_B & 0 \\ 0 & K_M \end{bmatrix}$$

- K_S 20,20 – matice tuhosti skořepinového prvku
- K_B 12,12 – matice tuhosti ohýbané desky
- K_M 8,8 – matice tuhosti membrány

Tento prvek lze použít pro nejruznější typy skořepin. Na obrázku lomenice je zobrazen uzel sítí prvků, ve kterém je šest stupňů volnosti. Matice tuhosti prvku stěnodesky v globální souřadné soustavě je typu 24×24 na rozdíl od lokální matice tuhosti typu 20×20 bez rozšíření.

$$K_S = T^T K_S^* T$$

- K_S^* 24,24 – rozšířená lokální matice tuhosti: $K_S^* = \begin{bmatrix} K_S & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$
- T – transformační matice z lokální do globální souřadné soustavy

Tuhost odpovídající rotaci θ_z v lokální soustavě souřadnic je nulová. Toto vyplývá z faktu, že tento stupeň volnosti nebyl zohledněn při formulaci problému (nebyl zahrnut ve výrazu pro energii deformace prvku).

V případě lomenice po transformaci z lokální soustavy souřadnic do globální soustavy souřadnic již má všechny globální stupně volnosti. V případě plochých (slabě zakřivených) skořepin je tuhost odpovídající stupni volnosti θ_z malá. Potom může být matice tuhosti špatně podmíněna nebo dokonce i singulární. Tento problém může být odstraněn zavedením malých koeficientů tuhosti odpovídajících rotacím θ_z .

$$K_S^* = \begin{bmatrix} K_S & 0 \\ 0 & kI \end{bmatrix}$$

- K_S 20,20
- I 4,4
- k – malé číslo (např.: $\frac{1}{100}$ nejmenšího diagonálního prvku matice K_S)

Jiný způsob, kterým lze obejít uvedený problém spočívá v použití konečného prvku pro skořepinu. Tento prvek je odvozen přímo na základě teorie skořepin. U řady prvků jsou provedeny zlepšení upravující uvedený nedostatek.

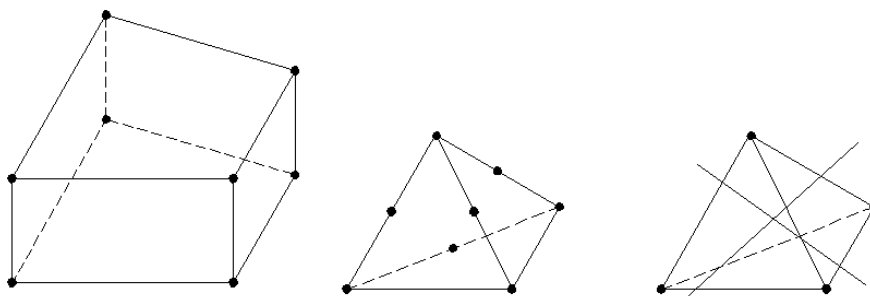
15 Prostorové konečné prvky

Prostorové prvky jsou nejčastěji izoparametrické ve tvaru:

- „brick“ (cihla)
 - osmiuzlový šestistěn – 24 stupňů volnosti
 - dvacetiuuzlový šestistěn – 60 stupňů volnosti
- „tet“ (tetraedr, čtyřstěn)
 - čtyřuzlový – 12 stupňů volnosti
 - desetiuzlový – 30 stupňů volnosti

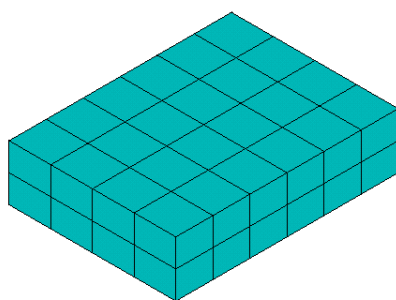
Tyto prvky mají v každém uzlu tři stupně volnosti u_x, u_y, u_z . Existují však i prostorové prvky s šesti stupni volnosti v uzlu:

- osmiuzlový šestistěn – 48 stupňů volnosti
- čtyřuzlový čtyřstěn – 24 stupňů volnosti

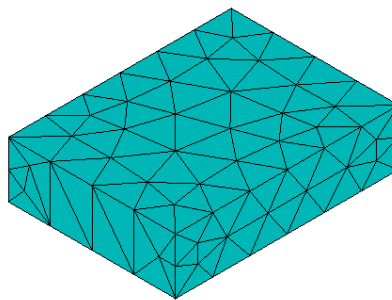


V praxi se preferuje používat síť prvků typu „brick“ před použitím prvků typu „tet“. V současné době však neexistují generátory sítě prvků ve tvaru šestistěnu pro obecně tvarované objemy. Objemy je nutné nejprve rozdělit na pravidelné topologicky přípustné podobobjemy a ty lze potom již vykrýt prvky ve tvaru šestistěnu.

Síť prvků typu „brick“:



Síť prvků typu „tet“:



V případě použití čtyřstěnů lze prakticky bez významných komplikací generovat síť prvků vykrývající libovolně tvarovaný objem – výhoda při přenosu objemů z CAD systémů.

16 Analýza konvergence

Konvergence k „přesnému“ řešení:

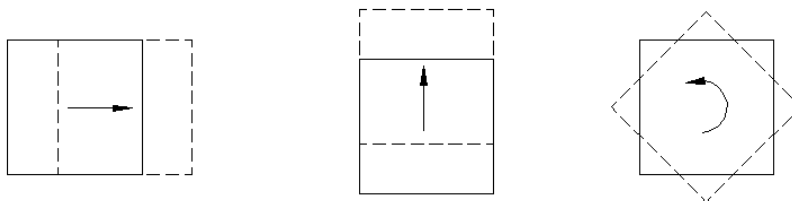
- monotónní
- nemonotónní

Abychom zajistili monotónní konvergenci ke správnému řešení, je nutné v deformační variantě konečných prvků dosáhnout toho, aby prvky byly úplné a kompatibilní. Jsou-li tyto podmínky splněny, potom při zjemňování sítě prvků přesnost řešení spojitě roste.

Požadavek úplnosti je kladen na funkce posunutí a je nutno zaručit, aby pohyb tělesa jako tuhého celku nevyvolal v tělese pružné deformace a dále aproximační funkce musí zaručovat možnost přesného stanovení konstantních deformací nebo napětí.

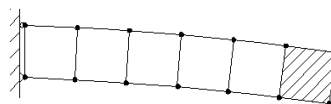
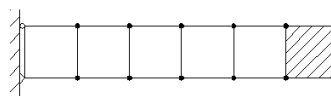
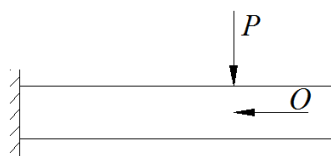
Tvary přemístění jako tuhého tělesa:

- prvek pro rovinnou napjatost



Tvary přemístění odpovídající stupni volnosti tělesa:

- rovinná úloha – 3 stupně volnosti
- prostorová úloha – 6 stupňů volnosti



*pohyb jako
tuhého celku,
prvek musí být
bez napětí*

Požadavek úplnosti je kladen na funkce posunutí a je nutno zaručit, aby pohyb tělesa jako tuhého celku nevyvolal v tělese pružné deformace a dále aproximační funkce musí zaručovat možnost přesného stanovení konstantních deformací nebo napětí.

Požadavek kompatibility je kladen na výběr aproximačních funkcí, které musí zaručovat spojitost hledané funkce uvnitř i na jeho hranici. Je-li n řád nejvyšší derivace ve variačním funkcionálu prvku, potom aproximační funkce musí být n -krát diferencovatelná a její derivace musí být spojitě do řádu $(n - 1)$ včetně. Prvky vyhovující tomuto předpokladu patří do třídy C^{n-1} prvků.

Současné splnění všech podmínek je spojeno s velkými těžkostmi. Existence n -té derivace se zaručuje relativně jednoduše. Požadavky spojitosti se ve většině případů vztahují k prvkům desek, skořepin nezávisle na stanoveném počtu stupňů volnosti. U těchto prvků se velmi těžko vyhovuje všem vztahům popisujícím pohyb tělesa jako tuhého celku. Podmínky úplnosti jsou splněny například, obsahují-li aproximační funkce polynomy minimálního řádu n , kde n je řád nejvyšší derivace v U u .

Úplné spojitě funkce na prvku při diskretizaci oblasti konstrukce zaručují monotónní konvergenci k hledanému řešení. Teoretické sledování přesnosti řešení ukázalo, že energetická norma reziduí je proporcionální h^{n+1-i} , kde h je charakteristický rozměr prvku, n je nejvyšší řád úplného polynomu obsaženého v aproximaci na prvku, i je nejvyšší řád derivací v U .

Rychlost konvergence je závislá na tvaru polynomu použitého pro aproximaci funkce posunutí.

Existuje pojem prostorově izotropní prvky – mají tytéž výrazy pro posunutí ve všech směrech.

Prostorově neizotropní prvky:

- $u_x \ x, y = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy$
- $u_y \ x, y = b_1 + b_2x + b_3y + b_4xy$

Funkce posunutí na prvku nezávislá na orientaci souřadných os. Těchto vlastností lze využít např.: u skořepinových prvků.

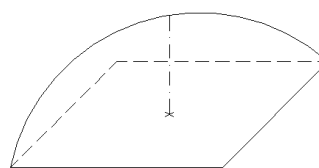
Je známo, že přesnost řešení MKP při zvětšení polynomu roste rychleji než při zhušťování sítě prvků.

16.1 Nekompatibilní modely prvků

V praxi se používá celá řada nekompatibilních prvků, protože pomocí nich lze získat prakticky použitelné výsledky řešení. Dokonce se velmi často používají tzv. nekompatibilní funkce (tvary) pro vylepšení vlastností prvku.

Např.: čtyřuzlový izoparametrický prvek pro řešení 2D úloh (rovinné napjatosti) s tvarovými funkcemi $\psi_i = \frac{1}{4} (1 + \xi_0 + \eta_0 + \xi_i \xi_0 + \eta_i \eta_0)$, $\xi_0 = \xi_i \xi$, $\eta_0 = \eta_i \eta$, $i = 1; 2; 3; 4$ velmi špatně přenáší ohyb v rovině. Po zavedení doplňkových nekompatibilních funkcí $\phi_i = 1 - \xi^2$, $i = 1; 3$ a $\phi_j = 1 - \eta^2$, $j = 2; 4$:

$$u_x = \sum_{i=1}^4 \psi_i u_{xi} + \alpha_1 \phi_1 + \alpha_2 \phi_2, \quad u_y = \sum_{i=1}^4 \psi_i u_{yi} + \alpha_3 \phi_3 + \alpha_4 \phi_4$$



„Bublinková funkce“

Tyto funkce nezlepšují spojitost mezi prvky.

Jednotlivé prvky se testují a prověřují se jejich vlastnosti – těmto testům se říká „benchmark testy“. Kontroluje se:

- obecná funkčnost prvku,
- přesnost prvku,
- neobsahuje-li prvek defekty (shear locking, spurious energy modes atd.),
- tvarová citlivost vzhledem k integraci apod.

16.2 Výpočet napětí na prvku

Na základě uzlových hodnot lze vyčíslit napětí v libovolném bodě prvku. Výpočet se provádí pomocí tzv. matice napětí – jedná se o matici napětí v závislosti na vektoru složek deformací.

V praxi se napětí vyčíslují pouze ve vybraných místech na prvku. Hodnoty složek napětí nejsou spojité mezi prvky, přestože pole napětí je obsaženo ve formulaci konečného prvku. Je vysledováno, že napětí v některých bodech je vyčíslováno s výrazně vyšší přesností než v ostatních bodech. Nejvíce „přesnými“ body jsou Gaussovy integrační body.